Занятие №54. Применение производной к исследованию функций

Вопросы для повторения:

1. Как узнать, в какой точке функция достигает максимума?
2. Как определить точку максимума и точку минимума?

Общая схема исследования функции и построения графиков

1. Найти область определения и область значения функции.
2. Определить, является ли функция четной или нечетной или является функцией общего вида: $f(-x)=-f(x)$, $f(-x)=f(x)$.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. нули функции: $f(x)=0$, $f(x=0)$.
4. Найти производную функции $f'(x)$.
5. Найти точки максимума или минимума (экстремума), т.е. где $f'(x)=0$.
6. Определить участки возрастания и убывания функции.
7. По полученным данным построить график функции.

Пример: Исследовать функцию $y=f(x)=x^2-8x+12$.

Решение.

1) Найдем область определения и область значения функции: Ox: $(-\infty; \infty)$, Oy: $(-\infty; \infty)$.

2) Определим, является ли функция четной: $f(-x)=(-x)^2-8*(-x)+12=x^2+8x+12$ – функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. нули функции:

а) $f(x)=0$**:** $x^2-8x+12=0$.

$$\mathrm{D}=64-4\cdot1\cdot12=16, x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, x_1=\frac{8-4}{2}=2, x_2=\frac{8+4}{2}=6.$$

Итак, в точках $A(2,0)$ и $B(6,0)$ график функции пересекает ось Ox.

б) $f(0)$:$f(0)=0^2-8*0+12=12$. В точке $C(0, 12)$ график функции пересекает ось Oy.

4) Найдем производную функции $f'(x)=(x^2)'-8*(x)'+(12)'=2x-8*1+0=2x-8$.

5) Найдем точки максимума или минимума (экстремума), т.е. где $f'(x)=0$. Приравняем уравнение производной нулю: $2x-8=0$. ***В точке x=4 - точка экстремума.*** Найдем значение функции в этой точке: $f(x=4)=4^2-8*4+12=16-32+12=-4$.

6) Определим участки возрастания и убывания функции. Заполним таблицу:

	$]-\infty,4[$	4	$]4,+\infty[$
$f'(x)$	<0	0	>0
$f(x)$	↘	-4	↗

7) Далее строим график (рис. 1). ■

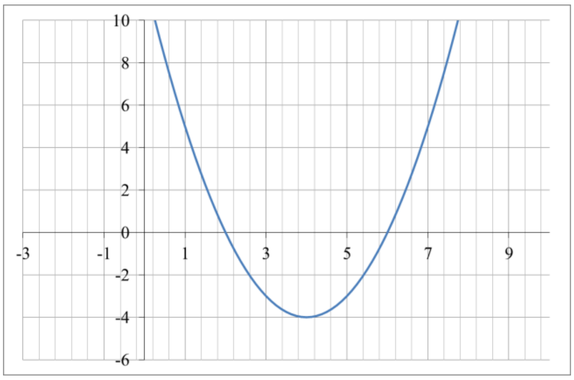

Рис. 54

Задания для самостоятельной работы:

1. Исследуйте функцию и постройте график:

а) $y=x^2-8x+12$, б) $y=x^2+10x+9$, в) $y=-x^2+2x+3$, г) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ д) y=-2x^2+x+1, е) y=3x^3-x,

Задание на дом:

❖ Исследуйте функцию $y=x^2-6x+5$ и постройте график.

Занятие №55. Приближенные вычисления

Вопросы для повторения:

1. Расскажите алгоритм исследования функции.
2. Как, не строя график функции, можно определить точки экстремума?

Напомним, что приращение аргумента $\Delta x=dx$ называют ***дифференциалом аргумента***, а выражение $df=f'(x_0)dx$ - ***дифференциалом функции***. Следовательно, производная равна отношению двух дифференциалов $f'(x_0)=\dfrac{df}{dx}$. Приближенное значение функции вблизи т. x_0

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Исходя из этой формулы, имеем:

$$(x+\Delta x)^n\approx x^n+nx^{n-1}\Delta x. \qquad (2)$$

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+n\frac{\Delta x}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}\ . \qquad (3)$$

Кроме того, можно использовать еще формулы:

$$(1+a)^n\approx 1+na. \qquad (4)$$

$$(1-a)^n\approx 1-na. \qquad (5)$$

Пример. Найти значение $\sqrt{1,02}$.

Решение. $f(x)=\sqrt{x}, x=1,\ \Delta x=0,02,\ f(1)=\sqrt{1},\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{1,02}=\sqrt{1+0,02}\approx 1+\frac{1}{2}*0,02=1+,01=1,01.\ \blacksquare$$

Пример. $\sqrt{0,97}=\sqrt{1-0,03}\approx 1-\dfrac{1}{2}*0,03=1-0,015=0,985.\blacksquare$

Пример. $\sqrt[3]{220}=(216+4)^{\frac{1}{3}}=\left(216*\left(1+\dfrac{4}{216}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=6*\left(1+\dfrac{4}{216}\right)^{\frac{1}{3}}\approx$

$$\approx 6*\left(1+\frac{1}{3}*\frac{4}{216}\right)\approx 6,037\ .\blacksquare$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислите:

а) $\sqrt{1,04}$, б) $\sqrt{1,09}$, в) $\sqrt{1,044}$, г) $\sqrt{0,92}$,

д) $\sqrt{0,96}$, е) $\sqrt{256}$, ж) $\sqrt[3]{345}$, з) $\sqrt[3]{604}$.

Задание на дом:

❖ Вычислите: $\sqrt{0,95}$.