Тема 9. Первообразная, неопределенный интеграл
Занятие №57. Первообразная и неопределенный интеграл

На практике часто приходится решать обратную задачу к процессу дифференцирования.

Постановка задачи: есть некоторая производная функции $f'(x)$ и необходимо выяснить, от какой функции ее получили. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию $F(x)$, чтобы $F'(x) = f(x)$.

О. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x)=f(x) \Rightarrow dF(x)=f(x), \text{ на } a\le x\le b.$$

Поскольку производная от константы C равна нулю, то справедливо равенство $(F(x)+C)'=f(x)$, т.е. функция $f(x)$ имеет **множество** первообразных $F(x)+C$ для произвольной константы C, причем эти первообразные отличаются друг от друга на произвольную постоянную величину. Таким образом, задача нахождения первообразной имеет бесконечное множество решений.

Пример 1. Функция $F(x)=x^3$ является первообразной для функции $f(x)=3x^2$ на интервале $(-\infty, +\infty)$, так как $F'(x)=(x^3)'=3x^2= f(x)$ для всех $x\in(-\infty, +\infty)$. Легко проверить, что функция x^3+20 или x^3-20 имеет ту же производную $3x^2$, поэтому x^3+20 и x^3-20 также является первообразной для функции $3x^2$ для всех $x\in(-\infty, +\infty)$. Ясно, что вместо ±20 можно взять любую постоянную. ■

О. Процесс разыскания функции, производная которой задана, называется ***интегрированием***.

О. Совокупность первообразных для функции $f(x)$ или для дифференциала $f(x)dx$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначаются символом (читается «интеграл эф от икс дэ икс»)

$$\int f(x)dx.$$

Интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1}$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция, дифференциал $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, C – произвольная постоянная.

Знак интеграла указывает, что надо произвести действие интегрирования над некоторым выражением. Символ dx означает, что указанное выражение представляет собою производную искомой функции, взятую по x.

Процесс интегрирования более сложен, чем дифференцирование, а многие выражения не поддаются интегрированию.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен самой этой функции плюс C – const:

$$\int df(x) = f(x) + C\ . \tag{2}$$

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал от него равен подынтегральному выражению

$$\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x) = f(x)\ , \tag{3}$$

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx\ . \tag{4}$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx \tag{5}$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) неопределенных интегралов от слагаемых функций.

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx\ . \tag{6}$$

Таблица 1

Таблица простейших интегралов

1	$\int dx = x + C$, C=const,	2	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
3	$\int \cos x dx = \sin x + C.$	4	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5	$\int e^x dx = e^x + C$	6	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
7	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	8	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$	10	$\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} - \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
11	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} - \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C,\ (a \neq 0)$	12	$\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} - \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, (a \neq 0)$

Пример 2. Вычислить $\int (3 + x) dx$.

Решение:

1. Применим 4-ое свойство (поставим знак интеграла перед каждым слагаемым):

$$\int (3 + x) dx = \int 3dx + \int xdx =>$$

2. применим 3-е свойство неопределенного интеграла – вынесем за знак интеграла коэффициент (число):

$$=> 3\int dx + \int x^1 dx =>$$

3. используем табл. 1 (формулы 1, 2), постоянную (число) можно оставить одну для всех:

$$=> 3(x + \mathrm{C}) + \frac{x^{1+1}}{1+1} + \mathrm{C} = 3x + 3\mathrm{C} + \frac{x^2}{2} + \mathrm{C} = 3x + \frac{x^2}{2} + 4\mathrm{C} = 3x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{C}.$$

Вместо 4С можно писать просто С, подразумевая, что это любое число ■

Пример 3. Вычислить $\int (1 - 6^x)^2 dx$.

Решение:

1. Возведем в квадрат выражение в скобках, используя формулу $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

$$\int \left(1 - 6^x\right)^2 dx = \int (1 - 2 \cdot 6^x + 6^{2x}) dx =>$$

2. применим 4-е свойство неопределенного интеграла (поставим знак интеграла перед каждым слагаемым) и вспомним свойства степеней $a^{mn}=(a^m)^n$:

$$=> \int 1dx - \int 2 * 6^x dx + \int 6^{2x} dx = \int 1dx - \int 2 * 6^x dx + \int (6^2)^x dx =>$$

3. применим 3-е свойство неопределенного интеграла – вынесем за знак интеграла коэффициент (число):

$$=> 1\int dx - 2\int 6^x dx + \int 36^x dx =>$$

4. используем табл. 1 (формулы 1, 6), постоянную (число) можно оставить одну для всех:

$$= x - 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{36^x}{\ln 36} + C\ . ■$$

Пример 4. Вычислить $\int \dfrac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$.

Решение.

1. Разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\int \left(\frac{2x^4}{x\sqrt{x}} - \frac{5x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \right) dx =>$$

2. Вспомним формулы $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, a^n a^m = a^{n+m}$:

$$\frac{x^4}{x\sqrt{x}} = \frac{x^4}{x*x^{\frac{1}{2}}} = x^{4-1-\frac{1}{2}} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^{\frac{6-1}{2}} = x^{\frac{5}{2}},$$

$$\frac{x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2-3}{6}} = x^{\frac{-1}{6}},$$

Последнее слагаемое преобразуйте самостоятельно.

3. Вынесем константы за знак интеграла, используя свойство 3,

$$=> 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 5\int x^{-\frac{1}{6}}dx + 7\int \frac{dx}{x} =>$$

4. Используем таблицу интегралов – формулы 2 и 7:

$$2\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C - 5\frac{x^{\frac{-1}{6}+1}}{\frac{-1}{6}+1} + C + 7\ln|x| + C = 2\cdot\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 5\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + 7\ln|x| + C = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} - 6x^{\frac{5}{6}} + 7\ln|x| + C \ \blacksquare$$

Пример 5. Вычислить $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$

Решение. Используем формулу $\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$:

$$\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\mathrm{ctg}x - x + c. \ \blacksquare$$

Пример 6. Вычислить $\int\frac{x^2}{9-x^2}dx$.

Решение: Добавим в числитель 0=9-9 и разобьем на две дроби:

$$\int\frac{x^2-9+9}{9-x^2}dx = \int\frac{x^2-9}{9-x^2} + 9\int\frac{dx}{9-x^2} = -\int dx + 9\cdot\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + c = -x + 1\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + c \ \blacksquare$$

Пример 7. Вычислить $\int 8(\sin^2\frac{x}{2}\ \ )dx$.

Решение. Применим формулу (75) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$:

$$\int 8\sin^2\frac{x}{2}dx = 8\int\frac{1-\cos x}{2}dx = 4\int(1-\cos x)dx = 4\int dx - 4\int\cos x dx = 4x - 4\sin x + c \ \blacksquare$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислить:

а)	$\int 3dx$	б)	$\int x^5 dx$	в)	$\int(2x+4\sin x)dx$
г)	$\int(5x-3\cos x)dx$	д)	$\int(2x^2-1)^2 dx$	е)	$\int(e^x+2x)dx$
ж)	$\int\frac{7x^4-x\sqrt[3]{x}}{7x\sqrt{x}}dx$	з)	$\int(\mathrm{ctg}^2 x+1)dx$	и)	$\int 2(\sin^2\frac{x}{2}+2)dx$

Задание на дом:

❖ Вычислите: $\int(3^x - e^x - 1)dx$.