Тема 8. Производная и ее приложения
Занятие №48. Определение производной

Вопросы для повторения:

1. Чем отличается предел функции от предела последовательности?

***

Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке a, если:

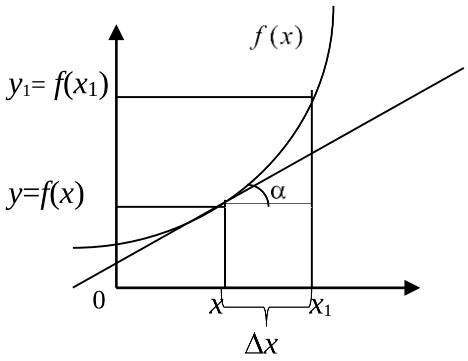

Рис. 1

1) $f(x)$ определена в т.a, т.е. существует число $f(a)$,
2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,
3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Рассмотрим рис. 1.

Здесь x, x_1 - значения аргумента, $y=f(x)$, $y_1=f(x_1)$ – значения функции $y=f(x)$.

Приращение – разность двух значений переменной величины:$\Delta x = x_1 - x$ - ***приращение аргумента*** x на отрезке $[x, x_1]$, $\Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ - ***приращение функции*** на том же отрезке $[x, x_1]$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_o и существует конечный предел отношения $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется ***производной*** функции в точке x_o:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Линейную функцию $f'(x)(x-x_0)$называют ***дифференциалом функции***f в точке xи обозначают df.

Геометрически дифференциал функции df – это приращение ординаты касательной к графику функции в данной точке при изменении абсциссы точки на dx.

Производная функции $y=f(x)$ может также обозначаться одним из следующих способов:$y'(x), f'_x, \frac{dy}{dx}$.

Операция вычисления производной называется ***дифференцированием***.

Функция называется ***дифференцируемой*** в данной точке, если в этой точке существует ее производная.

Дифференцируемыми могут быть только непрерывные функции.

При вычислении предела следует помнить, что ***величина x считается постоянной***, а Δx – переменной, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} x = x$.

Если $f(x)$ – четная функция, то $f'(x)$ – нечетная; если $f(x)$ – нечетная функция, то $f'(x)$ – четная.

Если существует первая производная, то существует и вторая производная (или производная второго порядка). Обозначение: y'', y''_x, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Общее правило дифференцирования:

1) Найти значения функции в т. $x+\Delta x$, т.е.$f(x+\Delta x)$.
2) Найти приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
3) Составить отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
4) Вычислить производную $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пример 1. Найти производную функции $y(x)=C$, где C – константа.

Решение:

1) Найдем значения функции в т. $x+\Delta x$, т.е. $y=f(x+\Delta x)=C$, т.к. при любом значении x функция остается неизменной.

2) Найдем приращение функции: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$.

3) Составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$.

4) Вычислим производную $y'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$. Итак, $C'=0$.■

Основные правила дифференцирования:

$$\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)'=f_1'(x)\pm f_2'(x), \tag{2}$$

$$(\alpha f(x))'=\alpha f'(x),\ \alpha - \text{const}, \tag{3}$$

$$\left(f_1(x)\,f_2(x)\right)'=f_1'(x)\,f_2(x)+f_1(x)\,f_2'(x), \tag{4}$$

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)'=\frac{f_1'(x)\,f_2(x)-f_1(x)\,f_2'(x)}{f_2^2(x)}, \tag{5}$$

$$(f(g(x))'=(f(g(x))'g'(x). \tag{6}$$

Таблица основных производных

1. $y'=(\text{const})'=0$	2. $y'=x'=1$	3. $y'=(x^2)'=2x$
4. $y'=(x^n)'=nx^{n-1},\ n\in N$	5. $y'=(\cos\alpha)'=-\sin\alpha$	6. $y'=(\sin\alpha)'=\cos\alpha$
7. $y'=(a^x)'=a^x\ln a$, $a>0,\ a\neq 1$	8. $y'=(e^x)'=e^x$	9. $y'=(\ln x)'=1/x$
10. $y'=(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha>0$	11. $y'=(\mathrm{tg}x)'=1/\cos^2 x$	12. $y'=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Пример 2. Найти производную функции $y=2+x^2$.

*Решение***.** Функция равна ***сумме*** двух функций: $f_1=2$и $f_2=x^2$. Используем формулу (2) и таблицу основных производных: $f_1'(x)=0$ и $f_2'(x)=2x$. Итак, $y'=2x$. ■

Пример3. Найти производную функции $y=(2+x)x^2$.

*Решение***.** Функция равна ***произведению*** двух функций: $f_1=2+x$и $f_2=x^2$. Используем формулу (4) и таблицу основных производных: $f_1'=1$ и $f_2'(x)=2x$. Итак,

$y'=((2+x)x^2)'=f_1'f_2+f_1f_2'=1*x^2+(2+x)*2x=x^2+4x+2x^2=3x^2+4x$. ■

Пример 4. Найти производную функции $y=(2+x^2)/x$.

*Решение***.** Функция равна частному двух функций: $f_1=2+x^2$и $f_2=x$. Используем формулу (5)**.** Найдем $f_1'=2x,\ f_2'=1$ и подставим в формулу:

$$y'=\frac{2x\cdot x-\left(2+x^2\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}=1-\frac{2}{x^2}\ . \ ■$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Дана функция. Найдите значения функции в точке:

а) $f(x)=x+4$, $f(3)$-? б) $f(x)=x^2+x+1$, $f(2)$-?

г) $f(x)=2x+3$, $f(1)$-? д) $f(x)=x^2+x+1$, $f(\Delta x+x)$-?

е) $f(x)=3x^2+x+1$, $f(\alpha)$-? ж) $f(x)=x^2-3x-4$, $f(\xi)$-?

2. Даны функции. Найдите их производные с помощью общего правила дифференцирования.

а) $f(x)=5$, б) $f(x)=x$, в) $f(x)=x+1$, г) $f(x)=x^2+1$.

3. Найдите производные функций:

а) $y=2+x^2$, б) $y=x^5$, в) $y=4+x^4$,

г) $y=x^2-2x+3$, д) $y=5x^2(x-x^2)$, е) $y=3x(x+1)$,

ж) $y=(2x+1)(3x-1)$, з) $y=4(x-1)(2x+1)$, и) $y=(4x^2+1)(x-x^2)$.

4. Найдите производные частного функций:

а) $y=(x^2-2x+3)/x$, б) $y=5x^2/(x-x^2)$, в) $y=3x/(x+1)$,

г) $y=(2x+1)/(3x-1)$, д) $y=4(x-1)/(2x+1)$, е) $y=(4x^2+1)/(x-x^2)$,

ж) $y=\mathrm{tg}x$, з) $y=(\sin x+1)/\cos x$, и) $y=\mathrm{ctg}x$.

Задание на дом:

1) Найдите производную функции $f(z)=z^2+2$ с помощью общего правила дифференцирования.

Найдите производную функции $y=Nx(x-2)+Nx$, где N– номер Вашего варианта