## *Тема 9.* Применение производной к исследованию функций

### Занятие №52. Касательная к графику функции

***Геометрический смысл производной***. Производная функции в т. $x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке с абсциссой $x_0$, $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, задается формулой $y=k(x-x_0)+y_0$. Поэтому ***уравнение касательной*** в общем случае выглядит так:

$$y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o). \qquad (1)$$

***Механический смысл первой и второй производной***. Скорость тела в момент времени $t$ равна $S'(t)$, а ускорение равно $S''(t)$, где $S(t)$ – путь, пройденный телом к моменту времени $t$.

Так, ***средняя скорость*** материальной точки за промежуток времени $\Delta t$ или $(t, t+\Delta t)$ равна

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Если рассматриваемое движение не является равномерным, то чем меньше выбран промежуток времени $\Delta t$, тем лучше указанная формула будет характеризовать движение точки.

***Мгновенная скорость*** $V$ - это предел, к которому стремится средняя скорость, когда $\Delta t \to 0$, то есть

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}. \qquad (3)$$

***Физический смысл производной***. Производная характеризует скорость изменения физической величины по отношению к другой, считающейся независимой переменной.

**Задача. Закон размножения бактерий.**

Пусть $N_o$ – число бактерий в момент времени$t_o$, $N_t$ – число бактерий к моменту времени $t$. Опытным путем установлено, что при благоприятных условиях скорость размножения бактерий пропорциональна числу бактерий

$$\frac{dN(t)}{dt} = KN(t). \qquad (4)$$

Решение уравнения $N(t)=N_o e^{Kt}$, следовательно, с течением времени число бактерий увеличивается по экспоненте. Величина $N(t)$ является возрастающей функцией, т.о. $\frac{dN(t)}{dt} > 0$, $K>0$. Например, для бактерий пенициллина $K=2$.

**Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции**

1. Вычислить значение функции $y_0$ в точке $x_0$: $y_0 = f(x_0)$.
2. Найти производной $y'(x)= f'(x)$.
3. Вычислить значение производной в т. $x_0$, т.е. $y'(x_0)= f'(x_o)$.
4. Записать уравнение касательной к графику функции в форме: $y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)$.

**Пример**. Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^2$ в точке $x_0=7$.

*Решение*:

1. Вычислим значение функции $y_0$ в точке $x_0$: $y_0= f(x_o)= f(x_0=7) = f(7)=7^2=49$.
2. Найдем производную $y'(x) = f'(x)=( x^2)'=2x$.
3. Вычислим значение производной в т. $x_0=7$, т.е. $y'(x_0)= f'(x_o)=y'(7) = 2*7=14$.
4. Запишем уравнение касательной к графику функции в форме:

$y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o)= f(x_o)[=49] + f'(x_o)[=14](x-x_o[=7]) = 49+14*(x-7)$=[раскрываем скобки, приводим подобные]= $49+14x-14*7=49+14x-98=14x-49$.

Ответ: уравнение касательной $y=14x-49$. ■

***Задания для самостоятельной работы:***

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2$ в точках:

а) $x_0=2$, б) $x_0=3$, в) $x_0=4$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2+2x-1$ в точках:

а) $x_0=0$, б) $x_0=2$, в) $x_0=1$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=2\sin x$ в точках:

а) $x_0=0$, б) $x_0=\pi/2$.

4. Тело массой 2 кг движется по закону $x(t)=t^2+t+1$. Найдите силу $F=ma$ и ускорение $a=x''$.

5. Тело вращается вокруг оси по закону $g(t)=3t^2-4t+2$. Найдите угловую скорость $w=g''(t)$ (рад/сек).

6. Население страны возрастает в среднем на 2% в год. Можно считать, что зависимость численности населения $S=S(t)$ от времени подчиняется уравнению $S'(t)=0{,}02S(t)$ и, следовательно, задается формулой $S(t)=S_o e^{0{,}02t}$, где $S_o=S(0)$ – численность населения в начальной дате расчетов. Найдите численность населения через 100 лет, если $S_o=150000000$ человек.

***Задание на дом:***

❖ Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^3+3$ в точке $x=2$.