Занятие №58. Определенный интеграл

Цель: изучить понятие определенно интеграла и научиться решать простейшие задачи

Вопросы для повторения:

1. Какой процесс называется интегрированием?
2. Что называют неопределенным интегралом?

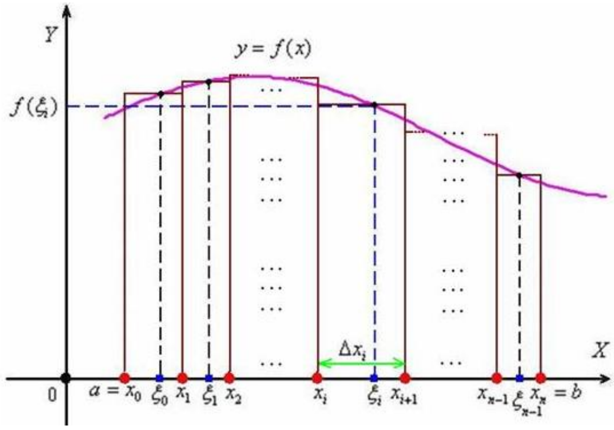

Рис. 1

Что означает прилагательное *«интегральный»*?[1] В широком смысле слова интегрировать – это значит, что-то объединять.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке [a,b] (рис.1). Для определённости и простоты считаем, что функция положительна (f(x)>0) и непрерывна на данном отрезке. **Поставим задачу:** найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью OX. Чтобы решить эту задачу, разобьём отрезок $[a,b]$ на n частей следующими точками: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Рассмотрим некоторый i-ый промежуток $[x_i,x_{i+1}]$. Его длина равна $\Delta x_i= x_{i+1}- x_i$.

Максимальную длину называют **диаметром разбиения** и обозначают буквой «лямбда»: $\lambda=\max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n-1}\}$. Значению аргумента ξ_i соответствует значение функции $f(\xi_i)$ - пунктирные линии. Произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ равно **площади** соответствующего прямоугольника. Аналогично устроен каждый отрезок. Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:

$$\sigma= f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 +\ldots+ f(\xi_i)\Delta x_i +\ldots+ f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

Данная сумма называется **интегральной суммой** и её часто записывают в свёрнутом виде (читается «сигма (σ) равна сумме (Σ) произведений эф от кси итых на дельта икс итых ($f(\xi_i)\Delta x_i$), где и (i) изменяется от нуля до эн минус 1 (n-1)»):

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Знак Σ (сигма заглавная) – это значок суммы, а переменная i – своеобразный «счётчик», т.е. сначала i=0, затем i=1, …, и, наконец, $i=n$-1.

Чтобы улучшить точность приближений, количество отрезков увеличивают. Соответственно, количество точек возрастает, и прямоугольники становятся все тоньше и тоньше. Количество точек ξ_i тоже возрастает и ступенчатая фигура всё больше и больше напоминает криволинейную трапецию.

Если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности $n \to\infty$, то интегральная сумма σ (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: $\sigma\to S$.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю, или определенному интегралу (читается «интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс»):

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\Big) = \int_a^b f(x)dx$$

О. Конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ при $\lambda\to 0$, не зависящий ни от способа дробления отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек ξ_i, называется определённым интегралом функции $f(x)$ по промежутку $[a,b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Определенный интеграл – это число.

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились пределы интегрирования. Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a. Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой b. Отрезок [a,b] называется **отрезком интегрирования.**

---

[1] Основная информация взята с сайта http://mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html . Там же можно найти больше информации про интеграл и не только.

Всегда ли существует определенный интеграл? Нет, не всегда.

Например, $\int_{-5}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})\Big|_{-5}^{-2}$. ***Нельзя подставлять отрицательные числа под корень!*** Данного определённого интеграла не существует.

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \quad c = \text{const} \tag{1}$$

Если функции f и g интегрируемы на интервале $[a,b]$, то

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{2}$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \text{ - формула Ньютона – Лейбница.} \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ , \tag{5}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ . \tag{6}$$

Что значит решить определенный интеграл? Решить определенный интеграл – это значит, найти число.

Как решить определенный интеграл? С помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Этапы решения определенного интеграла

1) Найти первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа С в определенном интеграле **не добавляется**.

2) Рядом с найденной первообразной функции записать $\Big|_a^b$ - обозначение является чисто техническим, вертикальная палочка не несет никакого математического смысла

3) Применить формулу Ньютона-Лейбница:

   a. Подставить значение верхнего предела в первообразную функцию F(b).
   b. Подставить значение нижнего предела в первообразную функцию F(a).

4) Вычислить (без ошибок!) разность F(b)- F(a), то есть, найти число.

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx.$

Решение.

1. Найдем первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Используем таблицу интегралов:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + \text{C}.$$

2. Рядом с найденной первообразной функции записываем $\Big|_{a=0}^{b=1}$,

$$\int_{a=0}^{b=1} x^2 dx = F(x)\Big|_a^b = \frac{x^3}{3}\Big|_{a=0}^{b=1} =$$

3. Применяем формулу Ньютона –Лейбница:

   a. Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию F(b).

b. Подставить значение нижнего предела в первообразную функцию F(a).

$$=F\left(b\right)-F\left(a\right)=\frac{(b=1)^3}{3}-\frac{(a=0)^3}{3}=$$

4. Вычисляем разность F(b)- F(a), то есть, находим число:

$$=\frac{(1)^3}{3}-\frac{(0)^3}{3}=\frac{1}{3}\ .$$

Кратко решение записывается следующим образом:

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{(1)^3}{3}-\frac{(0)^3}{3}=\frac{1}{3}\ \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/2}(1+2x+\cos x)dx$

Решение.

1. Найдем первообразную функцию $F(x)$ (неопределенный интеграл). Используем таблицу интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2x+cosx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}cosxdx=$$

2. Рядом с найденной первообразной функции записываем $|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+sinx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+sinx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

3. Применяем формулу Ньютона –Лейбница для каждого слагаемого:
   a. Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию F(b).
   b. Подставить значение нижнего предела в первообразную функцию F(a).

$$=\left[\frac{\pi}{2}-0\right]+\left[(\frac{\pi}{2})^2-0^2\right]+\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]=$$

4. Вычисляем разность F(b)- F(a), то есть, находим число в виде:

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+1$$

Кратко решение записывается следующим образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2x+cosx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}cosxdx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+sinx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+sinx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{\pi}{2}-0\right]+\left[(\frac{\pi}{2})^2-0^2\right]+\left[\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right]=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+1\ \blacksquare$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Вычислить:

а) $\int_{-2}^{2}3dx$, б) $\int_1^2 x^3dx$, в) $\int_1^2 x^4dx$,

г) $\int_0^{\pi/2}\sin xdx$, д) $\int_0^{\pi/2}\cos xdx$, е) $\int_0^{\pi/2}(1+\cos x)dx$,

ж) $\int_0^{\pi/2}\sin^2\frac{x}{2}dx$, з) $\int_0^1\left(2x+4\sin x\right)dx$, и) $\int_0^1\left(5x-3\cos x\right)dx$, л) $\int_{-2}^{2}\left(2x^2-1\right)^2 dx$, л) $\int_{0}^{1}\left(e^x+2x\right)dx$, м) $\int_{-1}^{0}\left(x-4\right)^2 dx$.

Задание на дом:

❖ Вычислить $\int_{0}^{\pi/2}(2\sin x+3\cos x)dx$.