Занятие №59. Площадь криволинейной трапеции

Вопросы для повторения:

1. Чем отличается определенный интеграл от неопределенного?
2. Что такое пределы интегрирования?

Переходим к рассмотрению приложений интегрального исчисления. Разберем наиболее распространенную задачу – как с помощью определенного интеграла вычислить площадь плоской фигуры.

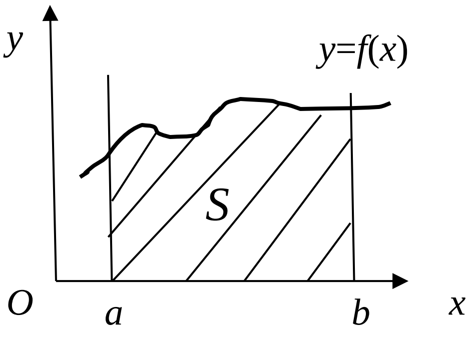

Рис. 1

Пусть на отрезке [*a*,*b*] оси задана непрерывная функция *f*, не меняющая на нем знака (рис. 1). Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком [*a*,*b*] и двумя вертикальными прямыми *x*=*a* и *x*=*b* и осью *Ox*, называется ***криволинейной трапецией***.

Геометрический смысл определенного интеграла. Площадь фигуры, являющейся криволинейной трапецией, есть определенный интеграл от функции *y*=*f*(*x*), если *x* изменяется от *a* до *b*.

$$S=\int_a^b f(x)dx\ , \qquad (1)$$

где *a* – нижний предел, *b* – верхний предел.

Если криволинейная трапеция расположена **под осью Ох,** то её площадь можно найти по формуле:

$$S=-\int_a^b f(x)dx\ , \qquad (2)$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций, находится по формуле:

$$S=\int_a^b \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx\ . \qquad (3)$$

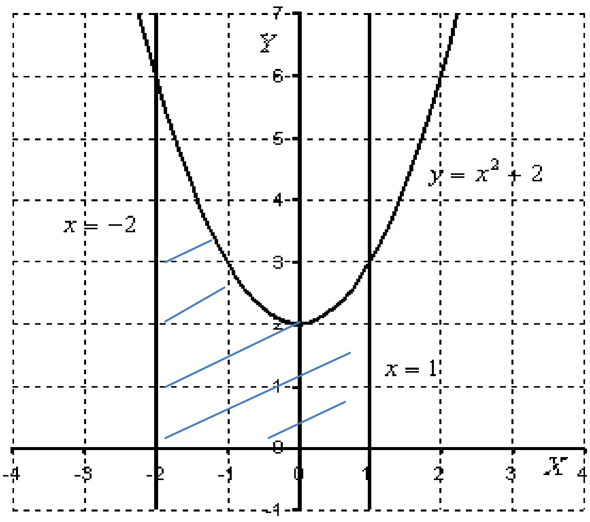

Рис. 1

Пример 1[1]**.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, y=0, x=-2, x=1.

Решение.

1. Строим график функции $y=x^2+2$. Интервал возьмем стандартный [-3,3].
2. Строим все прямые: y=0 (это ось ОХ), x=-2, x=1 (рис. 1). Найти надо площадь заштрихованной фигуры.
3. Площадь находится с помощью определенного интеграла. Подынтегральная функция – это $f(x)=x^2+2$, пределы интегрирования: нижний *a*=*x*=-2, верхний – b=x=1, т.е. это те прямые, которые ограничивают нашу трапецию:

$$S=\int_{-2}^{1}(x^2+2)dx=\int_{-2}^{1}x^2dx+\int_{-2}^{1}2dx=\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{1}{3}+2*1-\frac{(-2)^3}{3}-2*(-2)=\frac{1}{3}+2+\frac{8}{3}+4=9.$$

Ответ: S=9.

Когда задание выполнено, необходимо взглянуть на чертеж и прикинуть, реальный ли получился ответ. В данном случае подсчитываем количество клеточек в чертеже – примерно 9,

[1] http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html

совпадает с нашим решением. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно[2]. ■

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $f_1=2x^2+2$, $f_2=4x+7$.

Решение.

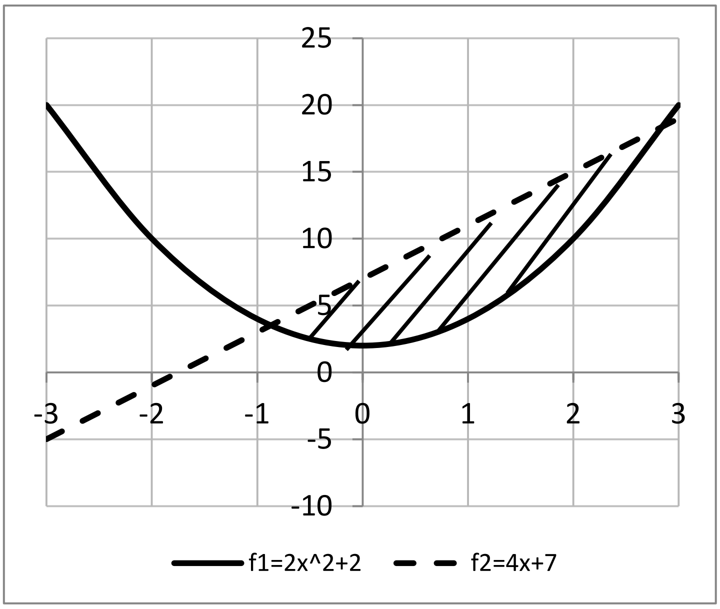

Рис. 2

1. Строим график функции $f_1=2x^2+2$. Интервал возьмем стандартный [-3,3].

2. Строим график функции $f_2=4x+7$ (рис. 2). Найти надо площадь заштрихованной фигуры.

3. Площадь находится с помощью определенного интеграла. Но нам неизвестны **пределы интегрирования**. Как их найти? Надо найти точки пересечения графиков функций Необходимо решить систему равнений:

$\begin{cases} y = 2x^2 + 2, \\ y = 4x + 7, \end{cases}$ или приравнять правые части и решить квадратное уравнение:

$$2x^2+2=4x+7,$$
$$2x^2-4x+2-7=0.$$
$$2x^2-4x-5=0,$$
$$D=16+40=56=14*2*2,$$
$$x_1 = \frac{4+\sqrt{2*2*14}}{4} = \frac{4+2\sqrt{14}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1 + \frac{3{,}7}{2} = 1 + 1{,}85 = 2{,}85,$$
$$x_2 = \frac{4-\sqrt{2*2*14}}{4} = \frac{4-2\sqrt{14}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 1 - \frac{3{,}7}{2} = 1 - 1{,}85 = -0{,}85.$$

4. Найденные значения будут являться пределами интегрирования: нижний предел $a=x_2=-0{,}85$ ($x_2<x_1$), верхний $b=x_1=2{,}85$.

5. Для решения используем формулу (3). В формуле роль второй функции будет играть та, что на графике будет выше. В нашем случае – это прямая $f_2=4x+7$:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int_{-0{,}85}^{2{,}85} \left((4x+7) - (2x^2+2) \right) dx = \int_{-0{,}85}^{2{,}85} \left(4x+7-2x^2-2 \right) dx =$$

$$= \int_{-0{,}85}^{2{,}85} \left(4x - 2x^2 + 5 \right) dx = (4\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + 5x) \Big| \begin{matrix} 2{,}85 \\ -0{,}85 \end{matrix} =$$

$$= (2{,}85^2 - \frac{2}{3} * 2{,}85^3 + 5 * 2{,}85) - ((-0{,}85)^2 - \frac{2}{3}(-0{,}85)^3 + 5*(-0{,}85))$$

$$= (8{,}1225 - \frac{2}{3} * 23{,}149125 + 14{,}25) - (0{,}7225 + \frac{2}{3} * 0{,}614125 - 4{,}25) =$$
$$= (8{,}1225 - 15{,}43275 + 14{,}25) - (0{,}7225 + 0{,}1023542 - 4{,}25) =$$
$$= 6{,}93975 - (-3{,}4251458) = 10{,}3648958$$

Ответ: S=10,3648958.

[2] Если предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $f_1=2x^2+2$, $f_2=4x+7$, x=0, x=2 .

Решение.

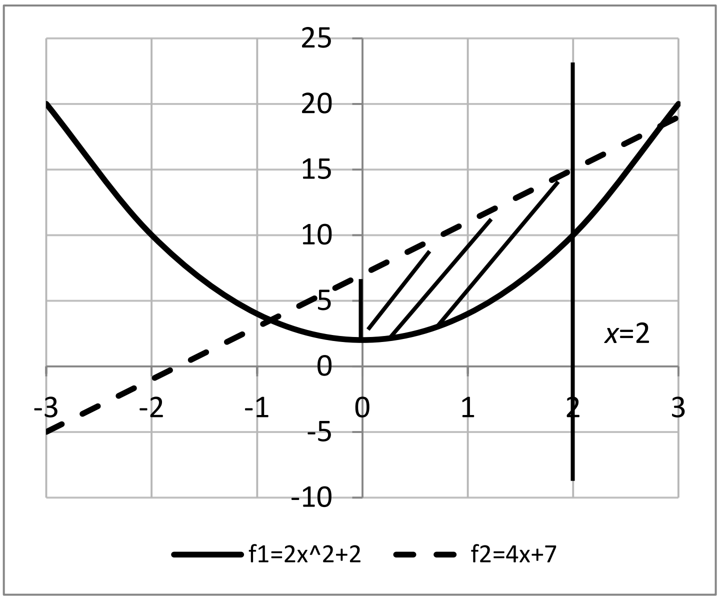

Рис. 3

1. Эта задача похожа на пример 2. Но здесь появились еще две линии $x=0$, $x=2$. Поэтому площадь ищется у другой фигуры.
2. Строим график функции $f_1=2x^2+2$. Интервал возьмем стандартный [-3,3].
3. Строим график функции $f_2=4x+7$ (рис. 2).
4. Проводим линию $x=2$. Линию $x=0$ строить не надо – это ось OX.
5. Найти надо площадь заштрихованной фигуры. Площадь также будем находить с помощью определенного интеграла.
6. Пределами интегрирования будут являться: нижний предел $a=x=0$, верхний $b=x=2$.
7. Для решения используем формулу (3)

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^2\left((4x+7)-(2x^2+2)\right)dx=\int_0^2\left(4x+7-2x^2-2)\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(4x-2x^2+5)\right)dx=(4\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}+5x)\Big|_0^2=$$

$$=(2^2-\frac{2}{3}*2^3+5*2)-(0^2-\frac{2}{3}*0^3+5*0))=4-\frac{16}{3}+10-0=14-5\frac{1}{3}=$$

$$=14-5-\frac{1}{3}=9-\frac{1}{3}=8+\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=8\frac{2}{3}$$

Ответ: $S=8\frac{2}{3}$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $a=0$, $b=3$, $y=0$, $y=x^2+1$,

б) $a=0$, $b=2$, $y=0$, $y=2-x^2$,

в) $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2x-x^2$,

г) $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=2x-x^2$,

д) $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=x^3$,

е) $a=1$, $b=4$, $y=0$, $y=-2x^2$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя линиями:

а) $f_1=x^2$, $f_2=x-2$

б) $f_1=2x^2$, $f_2=3x-1$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $f_1=x^2$, $f_2=x-2$, $a=0$, $b=2$,

б) $f_1=2x^2$, $f_2=3x-1$, $a=0$, $b=2$.

Задание на дом: *N* – номер Вашего варианта.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x=-1$, $x=2$, $y=0$, $y=Nx+4$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной двумя линиями: $f_1=Nx^2-4$, $f_2=Nx+4$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $f_1=Nx^2-4$, $f_2=Nx+5$, $a=-1$, $b=2$,