

Занятие №60. Вычисление объемов тел вращения с помощью интегралов

Вопросы для повторения:

1. Какие тела вращения Вы знаете?
2. Чем отличается шар от сферы?

Фигуру можно вращать двумя способами: вокруг оси абсцисс или вокруг оси ординат.

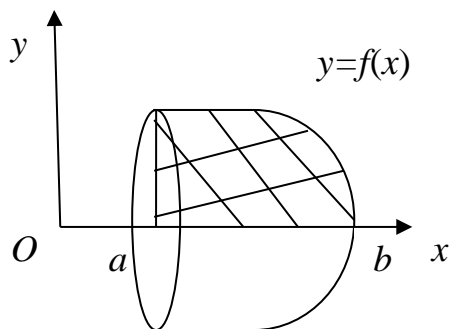


Рис. 56

Особенно интересен второй способ вращения, он вызывает наибольшие затруднения, но на самом деле решение практически такое же, как и в более распространенном вращении вокруг оси абсцисс.

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a, b]$ оси Ox и ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$. При вращении такой фигуры вокруг оси Ox получим тело вращения.

В формуле обязательно присутствует число π . Все, что крутится, связано с данной константой.

Объем фигуры, образованной в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$),

осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx . \quad (1)$$

Решение начинаем с чертежа.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти объемы тел, полученных при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$,

б) $y=1-x^2$, $y=0$,

в) $y=2x+1$, $x=0$, $x=1$, $y=0$,

г) $y=x+3$, $x=0$, $x=2$, $y=0$,

д) $y=\sin(x/2)$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$,

е) $y=\cos(x/2)$, $x=0$, $x=\pi/2$, $y=0$.

2. Найти объем тела, полученного вращением кривой $y=x^3$ на интервале $[0, 2]$ вокруг оси абсцисс.

Задание на дом:

- ❖ Найти объем фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=x^4$.