Занятие №53. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Вопросы для повторения:

1. Назовите геометрический смысл производной.
2. Назовите механический смысл производной.
3. Назовите физический смысл производной.

***

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками***, т.е. все экстремумы являются критическими точками.

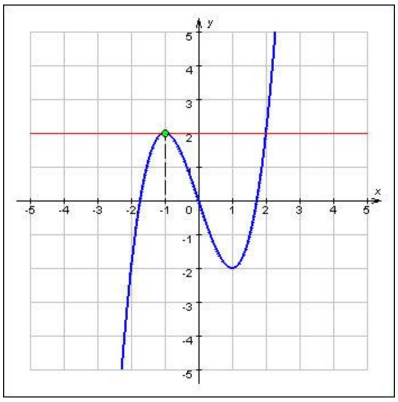

Рис. 1

Основные утверждения:

1. Пусть функция дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой этой точки, и непрерывна в точке x_0. Если производная функции меняет знак ***с минуса на плюс*** при переходе через эту точку слева направо, то **x_0 – точка минимума**. Если производная функции меняет знак с ***плюса на минус*** при переходе через эту точку слева направо, то **x_0 – точка максимума** (рис. 1).
2. Касательная к графику функции в точке экстремума параллельна оси абсцисс.
3. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и достигает в ней экстремума, то $f'(x_0)=0$.
4. Если $f'(x)>0$, на интервале $[a,b]$, то функция *f(x)**возрастает*** на этом интервале.
5. Если $f'(x)<0$, на интервале $[a,b]$, то функция *f(x)**убывает*** на этом интервале.
6. Если в точке x_0 функции f и g равны, а производные этих функций (если они существуют) удовлетворяют на некотором отрезке $[x_0; x_1]$ неравенству $f'(x) > g'(x)$, то в каждой точке промежутка $[x_0; x_1]$ выполняется неравенство $f(x)>g(x)$.

Пример 1. Пусть $f(x)=-x^2$. Найти точку экстремума функции.

Решение.

1. Найдем первую производную функции $f'(x)=-2x$.
2. Приравняем производную нулю: $f'(x)=-2x=0$. У нас получилось одно значение x=0.
3. Рассмотрим поведение производной до полученного значения и после него. Для этого построим таблицу:

	(-∞, 0)	[=0	(0, +∞)
Подсказка	Возьмем x= - 2∈(-∞, 0) и подставим в уравнение $f'(x)=-2x=-2*(-2)>0$, производная положительная. В соответствие с п. 4, функция возрастает. В соответствующие ячейки ниже ставим символы «+» и «↑»		Возьмем x=2 ∈(0, +∞) и подставим в уравнение $f'(x)=-2x=-2*2<0$, производная отрицательная. В соответствие с п. 5, функция убывает. В соответствующие ячейки ниже ставим символы «-» и «↓»
y′(x)	+	0	-
y(x)	↑	4	↓
		max	

4. Вывод: производная функции меняет знак с ***плюса на минус*** при переходе через точку x_0 слева направо, поэтому функция достигает в точке $x_0 = 0$ своего максимума. ■

Пример 2. Пусть $f(x)=x^3-3x+8$. Найти точки экстремума функции.

Решение.

1. Найдем первую производную функции $f'(x)=(x^3-3x+8)'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$.
2. Приравняем производную нулю: $f'(x)=3(x-1)(x+1)=0$. У нас получилось два корня уравнения: x=1 и x=-1, т.е. два значения.

3. Рассмотрим поведение производной на интервалах вокруг найденных значений. Для этого построим таблицу:

	$(-\infty, -1)$	-1	[-1,1]	1	$(1, +\infty)$
$y'(x)$	+	0	+	0	+
$y(x)$	↑	11	↑	6	↑

4. Вывод: производная функции не меняет знак при переходе через точки, поэтому функция не имеет максимума. ■

Пример 3. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением S=19,6t-4,9t^2. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение.

1. Найдем скорость движения – первую производную S'=19,6-2*4,9*t=19,6-9,8t.
2. Если первая производная равна нулю, то это и будет точка экстремума: S'=0 при t=2.
3. Найдем значение $S(t=2)$=19,6*2-4,9*2^2=19,6 (м) - наибольшая высота подъема тела.
4. Ответ: 19,6 м наибольшая высота подъема тела ■

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите экстремумы функций:

а) $y=2+x^2$, б) $y=x^5-1$, в) $y=4+x^4$,

г) $y=x^2-2x+3$, д) $y=2x^2(1-x)$, е) $y=3x(x+1)$.

2. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх, задан уравнением $S=12t-3t^2$. Найдите наибольшую высоту подъема тела.

Задание на дом:

❖ Найдите экстремум функции $y=5x^2(1-x)$.