

Занятие №61. Применение понятия интеграла для решения практических задач

С помощью интеграла в физике решается большое количество задач на определение пути по известному закону изменения мгновенной скорости и вычисления работы переменной силы.

Пример 1. Тело движется со скоростью $v(t)=t+2$ (м/с). Найти путь, который пройдет тело за 2 секунды после начала движения.

Решение.

Скорость – это первая производная от пути. Значит, чтобы найти путь, надо взять определенный интеграл от скорости. Вместо x в интеграле появится t . Нижний предел – время начала движения, значит $a=t_0=0$, верхний предел – через две секунды – время завершения движения, значит, $b=t_1=2$.

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (t+2) dt = \int_0^2 t dt + 2 \int_0^2 dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 + 2t \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} + 2 * (2 - 0) = 2 + 4 = 6.$$

Ответ: путь, который пройдет тело за 2 секунды после начала движения, равен 6 м.

Пример 2. Тело движется с ускорением 2 м/с^2 . Найти путь, пройденный за 10 секунд.

Решение. Ускорение – это вторая производная от пути. Найдем сначала скорость:

$$v = \int_0^{10} 2 dt = 2 \int_0^{10} dt = 2t \Big|_0^{10} = 2 * (10 - 0) = 20 \text{ м/с.}$$

Затем найдем путь:

$$S = \int_0^{10} 20 dt = 20 \int_0^{10} dt = 20t \Big|_0^{10} = 20 * (10 - 0) = 200 \text{ м.}$$

Ответ: путь, пройденный телом за 10 секунд, равен 200 м.

Пример 3. Вычислить работу силы F_A при сжатии пружины на 0,08 м, если для ее сжатия на 0,01 м требуется сила 10Н.

Решение:

1. Работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна:

$$A = \int_a^b F_A(x) dx.$$

2. Нам неизвестна сила $F_A(x)$. По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т.е. $F_A=kx$, где x - величина растяжения или сжатия (в м); k – постоянная. Из условия можем найти k . Известно, что при $x=0,01$ м $F=10$ Н, тогда

$$k=F/x=1000 \text{ Н/м.}$$

3. Следовательно, $F_A=kx=1000x$.

4. Подставляем в формулу для работы:

$$A = \int_0^{0,08} F_A(x) dx = \int_0^{0,08} 1000x dx = \left(1000 * \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{0,08} = 500 * (0,08^2 - 0^2) = 500 * 0,0064 = 3,2 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A=3,2$ Дж.

Пример 4. Рессора прогибается под действием силы $F=1,5 \cdot 10^4$ Н на 1 см^1 . Какую работу надо затратить для деформации рессоры на 3 см? (Деформирующая сила пропорциональна прогибу рессоры.)

Решение.

1. Сила $F=kx$, где x - прогиб рессоры. При $x=1 \text{ см} = 0,01 \text{ м} = 1 \cdot 10^{-2}$ м имеем:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1,5 * 10^4}{1 * 10^{-2}} = 1,5 * 10^6$$

2. Тогда сила $F=kx=1,5 \cdot 10^6 x$.

3. Работа для деформации равна:

$$A = \int_a^b F(x) dx = \int_0^{0,03} 1,5 * 10^6 x dx = 1,5 * 10^6 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,03} = 1,5 * 10^6 * \frac{0,03^2}{2} = 675 \text{ Дж.}$$

Ответ: $A=675$ Дж.

Вспомните!

Механический смысл первой и второй производной.

Скорость тела в момент времени t равна $S'(t)$, а ускорение равно $S''(t)$, где $S(t)$ – путь, пройденный телом к моменту времени t .

¹ Богомолов, Н.В. Практические занятия по высшей математике: учеб. пособие/ Н.В. Богомолов. - М.: Высшая школа, 1973.- 348 с.

Задания для самостоятельной работы:

1. Скорость движения автомобиля задана уравнением $v=3t^2+N$. Найти пройденный автомобилем путь S за время $t = 20 + N$ сек, где N – номер Вашего варианта.
2. Тело движется с ускорением 2 м/с^2 . Найти путь, пройденный за N сек, где N – номер Вашего варианта.
3. Сила в 10 Н растягивает пружину на $N \text{ см}$ (где N – номер Вашего варианта). Какую работу она совершает при этом?
4. Сила упругости пружины², растянутой 5 см , равна 3 Н . Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см ?

Домашнее задание

1. Найти путь, пройденный материальной точкой за 10 с от начала движения со скоростью $v=0,1t^3 + N \text{ м/с}$, где N – номер Вашего варианта.
2. Рессора прогибается под действием силы $F=2 \cdot 10^4 \text{ Н}$ на 1 см^3 . Какую работу надо затратить для деформации рессоры на 2 см ? (Деформирующая сила пропорциональна прогибу рессоры.)

² <https://kopilkaurokov.ru/matematika/uroki/praktichieskoieprimienieniieintieghrala>

³ Богомолов, Н.В. Практические занятия по высшей математике: учеб. пособие/ Н.В. Богомолов. - М.: Высшая школа, 1973.- 348 с.