

## Занятие №19. Операции над векторами в пространстве

**Цель:** научиться применять основные формулы

### Основные операции над векторами в пространстве:

Если  $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$  и  $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ , то:

1. **Сумма векторов** находится как сумма всех координат векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \quad (1)$$

2. **Разность векторов** находится как разность всех координат векторов

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \quad (2)$$

3. **Произведение вектора на число** находится как произведение каждой координаты вектора на число:

$$k\vec{a} = (kx_1, ky_1, kz_1). \quad (3)$$

4. **Длина вектора** равна

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (4)$$

5. **Расстояние между двумя точками**  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  находится как:

$$d = |\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5)$$

6. **Скалярным произведением** двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \quad (6)$$

или сумме произведений координат:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (7)$$

**Пример 1.** Найдите расстояние между двумя точками с координатами  $D(3, 5, 0)$  и  $M(-3, 4, 2)$ .

*Решение.* Выпишем значения координат:

$$x_1 = 3, y_1 = 5, z_1 = 0, x_2 = -3, y_2 = 4, z_2 = 2$$

и подставим в формулу (5):

$$d = |\overline{DM}| = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (4 - 5)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 1 + 4} = \sqrt{41}$$

Ответ:  $|\overline{DM}| = \sqrt{41}$  ■.

**Пример 2.** Даны координаты векторов:  $\vec{a}(1, 0, 0), \vec{c}(0, 0, 1)$ . Вычислите скалярное произведение векторов  $(\vec{a}, \vec{c})$ .

*Решение.* Выпишем значения координат:  $x_1 = 1, y_1 = 0, z_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 1$

Для нахождения скалярного произведения используем формулу (7):

$$(\vec{a}, \vec{c}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad \blacksquare$$

### Задания для самостоятельной работы:

- Даны векторы  $\vec{a} = (1, -2, 0)$  и  $\vec{b} = (2, 1, -3)$ . Определите координаты векторов:
  - $\vec{a} + \vec{b}$ ,
  - $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ,
  - $\vec{a} - \vec{b}$ ,
  - $-3\vec{a} + 2\vec{b}$ ,
  - $5\vec{a} + \vec{b}$ ,
  - $-2\vec{a} - 3\vec{b}$ .
- Найдите расстояние между точками  $M(-4, 7, 0)$  и  $N(0, -1, 2)$ .
- Даны точки  $A(4, 4, 0), B(0, 0, 0), C(0, 3, 4), D(1, 4, 4)$ . Постройте фигуру и найдите длины всех сторон и диагоналей.
- Даны координаты точек треугольника  $ABC$ . Постройте треугольник и найдите его периметр:
  - $A(4, 0, 1), B(1, -4, 0), C(1, 3, -1)$ ,
  - $A(2, 3, 0), B(-3, 3, 1), C(0, -1, 2)$ .

### Задание на дом:

1. Заполните таблицу по дате рождения:

	Дата		Месяц		Год			
Дата рождения	0	7	0	4	1	9	6	1
Буквы	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>m</i>	<i>n</i>

2. Постройте векторы, выбирая числа из таблицы:  $\vec{a}(d, h+k+m+n)$ ,  $\vec{b}(-(d+e), (m+n))$ ,  $\vec{c}(-(g+h), -(e+h))$ .  
Найдите сумму  $\vec{a} + \vec{b}$  и разность векторов  $\vec{b} - \vec{c}$ .