Занятие №20. Операции над векторами в пространстве. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними,

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right) \qquad (6)$$

или сумме произведений координат:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\,. \qquad (7)$$

Скаляр — это величина, которая полностью определяется в любой координатной системе одним числом или функцией.

Свойства скалярного произведения

1. $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\vec{a}^{\,2}$,
2. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$, если $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$, либо $\vec{a}\perp\vec{b}$, т.е. векторы ортогональны,
3. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$,
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$,
5. $\left(k\vec{a}\right)\vec{b}=\vec{a}\left(k\vec{b}\right), k$ - число.

Зная скалярное произведение, можно найти угол между векторами.

Косинус угла между двумя векторами можно найти по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\,. \qquad (8)$$

Если $\cos a = x$ $(-1\le x\le 1)$, то $a = \pm\arccos x + 2\pi n$, $n\epsilon Z$ (если $|x|>1$, то уравнение не имеет корней).

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0°. Так как косинус угла в 0° равен единице, то скалярное произведение сонаправленных векторов является произведением их длин.

Если угол между векторами равен 90°, то такие векторы перпендикулярны друг другу.

Пример: Найдите угол между векторами $\vec{a}(\sqrt{2},0,1)$ и $\vec{b}(0,-\sqrt{2},1)$.

Решение: выпишем отдельно координаты векторов:

$$x_1=\sqrt{2},\ y_1=0, z_1=1, x_2=0, y_2=-\sqrt{2}, z_2=1$$

и подставим их в формулу для скалярного произведения

$$\cos(\vec{a}\hat{,}\vec{b})=\frac{\sqrt{2}\cdot 0+0\cdot(-\sqrt{2})+1\cdot 1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}}=\frac{0+0+1}{\sqrt{2+0+1}\sqrt{0+2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}..$$

$(\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{6}} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$.

Ответ: $(\vec{a}\hat{,}\vec{b}) = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{6}} + 2\pi n,\ n\epsilon Z$ ■

Задания для самостоятельной работы

1. Даны координаты векторов: $\vec{a}(1,-1,2),\vec{b}(-1,1,1),\vec{c}(5,6,2)$. Вычислите скалярное произведение векторов $\left(\vec{a},\vec{c}\right),\left(\vec{a},\vec{b}\right),\left(\vec{b},\vec{c}\right)$.
2. Вычислите угол между векторами:
а) $\vec{a}(2,-2,0),\vec{b}(3,0,-3)$, б) $\vec{a}(\sqrt{2},\sqrt{2},2),\vec{b}(-3,-3,0)$, в) $\vec{a}(0,5,0),\vec{b}(0,-\sqrt{3},1)$
3. Постройте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 5 см. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DB_1}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.
4. Найдите длину вектора $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4,\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)=60^\circ,\vec{a}\cdot\vec{b}=17$
5. Даны точки $A(2,-1,0)$, $B(3,-1,2)$, $C(1,1,1)$ и $D(-2,1,1)$. Вычислите скалярные произведения векторов $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Задание на дом:

❖ Даны точки $A(1,3,0)$, $B(2,3,-1)$, $C(1,2,-1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.