Занятие №17. Операции над векторами на плоскости

Вопросы для повторения:

1. Какой отрезок прямой называют вектором?
2. Что является началом и концом вектора?

***

Мы рассмотрели сложение векторов по правилу треугольника и параллелограмма. Данные операции мы выполняли геометрически, но их можно выполнить и аналитически.

Попробуем сравнить с числами.

Таблица №1 – Основные операции над числами и векторами

Операция	Закон	Числа	Пример	Векторы $\vec{a}(x_1;y_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2)$, $\vec{c}(x_3,y_3)$
сложение	переместительный	*a+b=b+a*	3+5=5+3	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_2+x_1,y_2+x_1)$
	сочетательный	*(a + b) +c= a + (b+c)*	(2+3)+5=2+(3+5)	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
	свойство нуля	*a + 0 = a*	2+0=2	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
	сумма противоположных объектов	*a + (-a) = 0*	2+(-2)=0	$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
	сложение разно знаковых объектов	*a + (-b) = a-b*	5-2=3	$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
Произведение объекта на объект	переместительный	*ab = ba*	3*5=5*3	$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$ – векторное произведение
	сочетательный	*(ab)c = a(bc)*	(2*3)*5=2*(3*5)=30	$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$
	распределительный	*(a - b)c = ac – bc*	(2-3)*5=2*3-5*3=-5	$(\vec{a}-\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}$
Произведение объекта на число		*a*b*	3*5=15	$2*\vec{a}=(2x_1,2\,y_1)$
	свойство нуля	*a · 0 = 0 -*	3*0=0	$0*\vec{a}=\vec{0}$
	свойство единицы	*a*1 = a*	3*1=3	$1*\vec{a}=\vec{a}$
	свойство обратных чисел	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$, a≠0	$4\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$,	$\vec{a}*\frac{1}{\vec{a}}$ – нет такой операции

Основные операции над векторами на плоскости

Если $\vec{a}(x_1;y_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2)$, то:

1. ***Сумма векторов*** находится как сумма всех координат векторов:

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2). \qquad (1)$$

2. ***Разность векторов*** находится как разность всех координат векторов:

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2). \qquad (2)$$

3. ***Произведение вектора на число*** находится как произведение каждой координаты вектора на число:

$$k\vec{a}(kx_1;ky_1).\qquad(3)$$

4. ***Длина вектора*** равна:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ .\qquad(4)$$

5. ***Расстояние*** между двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ находится как

$$d=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .\qquad(5)$$

Чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были ***коллинеарны***, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\vec{a}=k\vec{a}$, где k — некоторое число.

Чтобы три вектора $\vec{a},\vec{i},\vec{j}$ были ***компланарны***, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, где x, y — некоторые числа.

Любой вектор можно единственным образом разложить по трем некомпланарным векторам.

Если M — середина $\overrightarrow{AB}$, т.O – любая точка плоскости, то $\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)/2$.

Если M — середина $\overrightarrow{AB}$, а N — середина $\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)/2$.

Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, т. O – любая точка плоскости, то $\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)/3$.

Если M — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то $\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)/4$.

Координаты середины отрезка равны средним арифметическим координат его концов $x=(x_1+x_2)/2$, $y=(y_1+y_2)/2$.

Пример 1. Даны два вектора $\vec{a}(1,2)$ и $\vec{b}(3,4)$. Найти вектор $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ и его длину.

Решение.

1) Найдем сначала вектор $3\vec{a}$, используя свойство 3:

$$3\vec{a}=(3*1,3*2)=(3,6).$$

2) Далее найдем вектор $\vec{c}$, используя свойство 2:

$$\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}=(x_b-x_{3a},y_b-y_{3a})=(3-3,4-6)=(0,-2).$$

3) Длина вектора находится по формуле (4):

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\ |\vec{c}|=\sqrt{x^2\ +y^2}=\sqrt{0^2+(-2)^2}=\sqrt{0+4}=2.$$

Ответ: $\vec{c}=(0,-2),|\vec{c}|=2.$

Пример 2. Даны точки с координатами A(7, 4), B(-5, 0). Найти расстояние между ними.

Решение: расстояние находится по формуле (5).

Выпишем значения координат $x_1=7,y_1=4,x_2=-5,y_2=0$ и подставим в формулу:

$$d=|\overline{AB}|=\sqrt{(-5-7)^2+\left(0-(-4)\right)^2}=\sqrt{(-12)^2+4^2}=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}=\sqrt{16*10}=4\sqrt{10}.$$

Ответ: $4\sqrt{10}$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите координаты векторов:

а) $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, если $\vec{a}=(2,-1),\vec{b}=(-1,0),\vec{c}=(1,2)$.

б) $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, если $\vec{a}=(0,-1),\vec{b}=(-1,0),\vec{c}=(1,3)$.

2. Найдите расстояние между точками M(-4,0) и N(-1, 2).

3. Даны точки A(4,0), B(0,0), C(0,4), D(4,4). Постройте фигуру и найдите расстояния между всеми точками по формуле (5).

4. Постройте векторы и найдите сумму и разность векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

а) $\vec{a}$ (4, -2), $\vec{b}$ (-3, 0), $\vec{c}$ (-3, -1), б) $\vec{a}$ (1, 2), $\vec{b}$ (2, -1), $\vec{c}$ (-3, 5).

Задание на дом:

1. Заполните таблицу по дате рождения:

	Дата		Месяц		Год			
Дата рождения	0	7	0	4	1	9	6	1
Буквы	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*

2. Постройте векторы, выбирая числа из таблицы: $\vec{a}$ (d,h+k+m+n), $\vec{b}$ (-(d+e), (m+n)), $\vec{c}$ (-(g+h), -(e+h)).
3. Найдите сумму $\vec{a}$ $+\vec{b}$ и разность векторов $\vec{b}$ - $\vec{c}$.