Практическое занятие №2. Угол между плоскостями

Цель: изучить расположение углов между прямыми и плоскостями

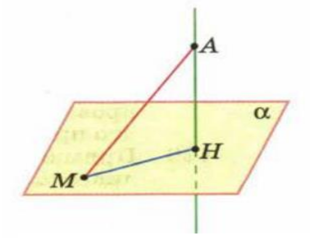


Рис. 2

Рассмотрим плоскость α и точку *A*, не лежащую в этой плоскости[1] (рис. 1). Проведем через точку *A* прямую, перпендикулярную к плоскости *α*, и обозначим буквой Н точку пересечения этой прямой с плоскостью α. Отрезок АН называется ***перпендикуляром***, проведенным из точки *A* к плоскости α, а точка Н — ***основанием*** перпендикуляра.

☞**О.** Отметим в плоскости α какую-нибудь точку *M*, отличную от Н, и проведем отрезок АМ. Он называется ***наклонной***, проведенной из т. *A* к плоскости α, а точка *M* – ***основанием наклонной***. Отрезок НМ называется ***проекцией наклонной на плоскость α***.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *AMH*. Сторона *AH* — катет, а сторона *AM* — гипотенуза, т.е. *AH* < *AM*. Следовательно, перпендикуляр, проведенный из данной точки А к плоскости α, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости. Из всех расстояний от т. А до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до т. Н.

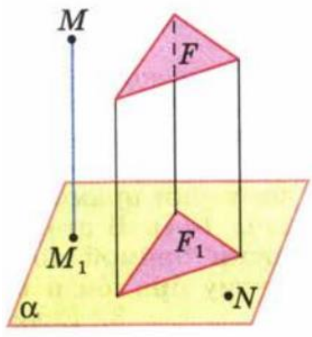


Рис. 2

☞**О.** Длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости α, называется ***расстоянием от точки A до плоскости α.***

☞**О.** Обозначим буквой *F* какую-нибудь фигуру в пространстве (рис. 2). Если построить проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получится фигура F_1, которая называется ***проекцией фигуры F на данную плоскость***.

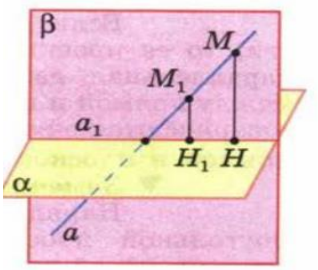
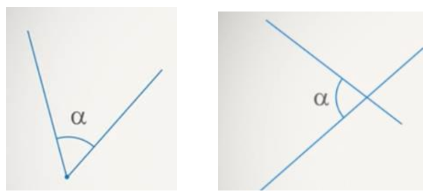


Рис. 3

Чтобы построить проекцию прямой на плоскость, достаточно опустить из любых двух ее точек перпендикуляры на плоскость (спроектировать эти точки), после чего провести через них прямую – это и будет проекция (рис. 3).



Угол между лучами | Угол между прямыми

Рис. 4

Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая. Любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой *a*.

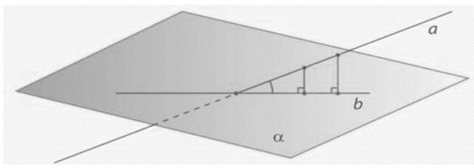


Рис. 5. Угол между прямой и плоскостью

Введем понятие угла между прямыми, прямой и плоскостью.

☞**О. Углом между двумя пересекающимися прямыми** называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых $0^0<\angle(a,b)\leq 90^0$ (Рис. 4).

☞**О. Углом между двумя скрещивающимися прямыми** называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.

☞**О. Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой** называется наименьший угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость $0^0<\angle(a,b)\leq 90^0$ (рис. 5).

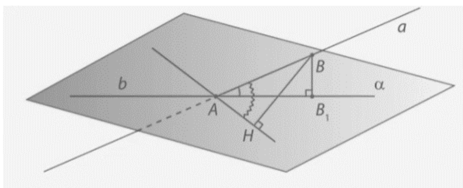


Рис. 6. Углы между любыми прямыми и между прямой и плоскостью

☞**О.** ***Расстояние от точки до плоскости*** – это кратчайший из отрезков, соединяющий исходную точку с точкой плоскости.

Обратите внимание! Углом между прямой и плоскостью называется угол именно между прямой и ее проекцией, а не между прямой и любой прямой в плоскости. Потому как такие углы могут быть разными (рис. 6).

☞**О. Двугранным углом** называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.

☞**О.** Полуплоскости называются **гранями**, а ограничивающая их прямая – **ребром** двугранного угла (рис. 7).

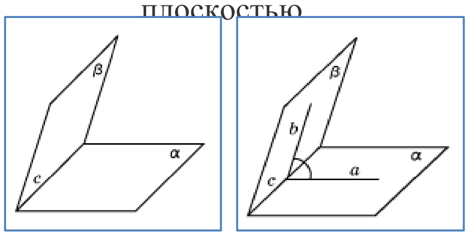


Рис. 7. Построение двугранного угла

[1] Российская электронная школа. https://resh.edu.ru/subject/lesson/6127/conspect/221518/

Построение линейного угла двугранного угла, образованного плоскостями α и β:

1) Построить две пересекающиеся плоскости (рис. 7).
2) На прямой пересечения плоскостей поставить точку М.
3) Из т. М провести перпендикуляр $a \in \alpha$ и $b \in \beta$ к прямой пересечения плоскостей;

Величина угла АМВ находится из прямоугольного треугольника или из некоторого треугольника с применением теоремы косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

Пример 1. Прямая *AM* перпендикулярна плоскости равностороннего треугольника *ABC*, точка *H* – середина стороны *BC*. Найдите угол между прямой *MH* и плоскостью *ABC*, если $AM = a$, $HB = a$ (рис.8).

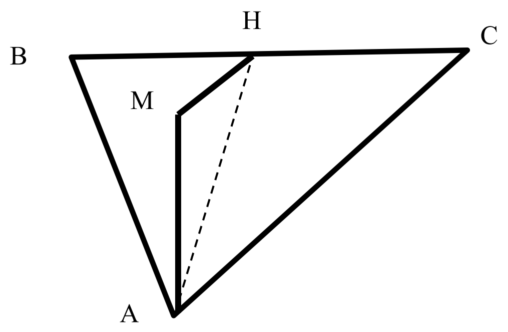


Рис. 8

Решение. Необходимо найти угол МНА.

1) Рассмотрим треугольник *ABC*. По условию он равносторонний, следовательно, его медиана является высотой и биссектрисой. Так как *HB* = a, то любая сторона треугольника имеет длину $2a$.
2) Рассмотрим треугольник *AHB*. Он прямоугольный, т.к. *AH* медиана и высота. По теореме Пифагора вычислим длину стороны *AH*:

$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

3) Рассмотрим треугольник *MHA*, он прямоугольный, т.к. *MA* перпендикулярна плоскости *ABC*. Оба катета известны, $MA = a$, АН = $a\sqrt{3}$. Можем выразить тангенс искомого угла: $tg\ MHA = \frac{MA}{HA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По таблице находим значение угла – 30^0.

Ответ: $\angle MHA = 30^\circ$.

Пример 2. Из точки *O* к плоскости *α* проведена наклонная, длина которой равна 17 см, проекция наклонной равна 15 см (рис. 9). На каком расстоянии от плоскости находится точка *O*?

Решение.

1) Построим чертеж. *OH*– перпендикуляр, *OM* – наклонная, длина которой 17 см, *MH* – проекция наклонной, длина которой 15 см.

2) Треугольник *OHM* – прямоугольный, т.к. *OH* – перпендикуляр и искомое расстояние. По теореме Пифагора:

$$OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8 \text{ см}.$$

Ответ: 8 сантиметров.

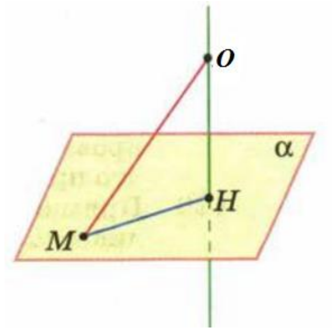


Рис. 9

Задания для самостоятельной работы:

1. Точка М не лежит в плоскости прямоугольника ABCD. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM.
2. Точка М не лежит в плоскости трапеции ABCD с основанием AD. Докажите, что прямая AD параллельна плоскости BMC.
3. Отрезок[2] AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что AB=AC=5 см, BC = 6 см, AD=12 см. Найдите расстояние от концов отрезка AD до прямой BC
4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите:

а) угол между прямыми AB_1 и BC_1.

б) угол между прямыми DA_1 и BD_1.

в) угол между прямой AD_1 и плоскостью ABCD.

г) угол между прямой B_1D и плоскостью ABB_1A_1.

Задание на дом:

1. Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD – скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если угол AOB равен: а)40^0 б) 135^0 в) 90^0?

---

[2] Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений базовый и профил. уровни/[Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др.] – 22 –ое изд. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.