Занятие №21. Векторное произведение векторов.

Вопросы для повторения:

1. Что называют скалярным произведением векторов?
2. Перечислите основные свойства скалярного произведения.

***

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям (рис. 1):

1) Модуль вектора $\vec{c}$ равен ***площади параллелограмма***, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (1)

2) Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$.

3) Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ после приведения к общему началу ориентированы по отношению к друг другу соответственно как единичные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ (в правой системе координат образуют так называемую ***правую тройку векторов***) .

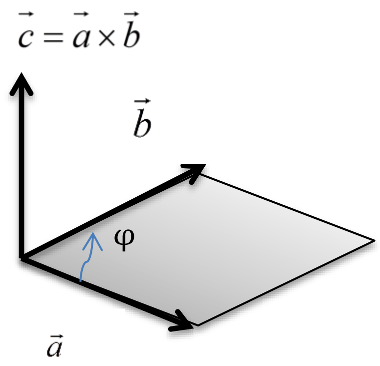

Рис. 1

Векторное произведение обозначается как $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a},\vec{b}]$ и находится по формуле[1]:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) - \vec{j}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (2)$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\hat{\vec{b}}) \quad (3)$$

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.	2. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$, либо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, т.е. векторы коллинеарные.
3. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$,	4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Векторные произведения координатных ортов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ равны:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0.,\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.$$

Момент импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно некоторого начала отсчёта определяется векторным произведением её радиус-вектора и импульса:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы относительно выбранного неподвижного в данной системе отсчёта начала отсчёта, $\vec{p}$— импульс частицы.

Пример 1. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ =(-3,1,0) и $\vec{b}$ =(1,0,-2).

Решение:

1. По определению модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По формуле (2) находим векторное произведение:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(1*(-2) - 0*0) - \vec{j}((-3)*(-2) - 1*0) + \vec{k}((-3)*0 - 1*1) = -2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}.$$

2. Находим модуль вектора $\vec{c} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} = (-2,-6,-1) = (x = -2, y = -6, z = -1)$ по формуле:

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 36 + 1} = \sqrt{41}$$

Ответ: площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S = \sqrt{41}$ ■

Пример 2. Даны два вектора $\vec{a}$ =(-3,1,0) и $\vec{b}$ =(1,0,-2). Найдите угол между ними.

Решение:

[1] $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ – определитель 3-го порядка.

1. По формуле (2) находим векторное произведение (см. пример 1):

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(1 * (-2) - 0 * 0) - \vec{j}((-3) * (-2) - 1 * 0) + \vec{k}((-3) * 0 - 1 * 1) = -2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}.$$

2. Находим модуль вектора $\vec{c} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} = (-2, -6, -1) = (x = -2, y = -6, z = -1)$ по формуле:

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 36 + 1} = \sqrt{41}$$

3. Угол можно найти из формулы (1) $\sin\varphi = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}|}$. Для этого надо сначала найти модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (0)^2} = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5}$$

4. Подставляем в формулу и находим синус угла:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{5}}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{41}} = \sqrt{\frac{50}{41}}$$

5. Осталось найти сам угол. Вспоминаем, что, если $\sin\varphi = x$, то

$$\varphi = (-1)^n \arcsin x + \pi n, n \in Z,$$

Подставляем и получаем ответ $\varphi = (-1)^n \arcsin\sqrt{\frac{50}{41}} + \pi n, n \in Z,$

Ответ $\varphi = (-1)^n \arcsin\sqrt{\frac{50}{41}} + \pi n, n \in Z.$■

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите скалярное и векторное произведения векторов:

а) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$, б) $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$,

в) $\vec{a}$ =(3,2,1) и $\vec{b}$ =(2,0,1), г) $\vec{a}$ =(-2,0,1) и $\vec{b}$ =(1,0,-3).

2. Вычислите площадь треугольника с вершинами $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$.

3. Даны координаты векторов $\vec{a}$ =(3,2,1), $\vec{b}$ =(2,0,1), $\vec{c}$ =(-2,0,1). Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{c}$ и $\vec{b}$.

4. Найдите угол между векторами

а) $\vec{a}$ =(3,4,5), $\vec{b}$ =(4,5,-3); б) $\vec{a}$ =(0,3,1), $\vec{c}$ =(2,1,1).

5. Даны точки A(-4, 2, 6) , B(2,-3,0), C(-10,5,8) и D(-5,2,-4). Постройте фигуру, найдите площадь грани ABC и объем фигуры.

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

7. ***Моментом силы*** $\vec{F}$, приложенной к т. B относительно т. A, называется векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \vec{F}]$. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки A(3,2,-1) и B(4,-2,3). Найдите момент силы $\vec{F}$ относительно т.A.

Задание на дом:

❖ Постройте и вычислите площадь треугольника с вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.