

## Занятие №22. Смешанное произведение векторов.

### Вопросы для повторения:

1. Письменно в тетради ответьте на вопрос: чем отличается скалярное произведение от векторного?  
\*\*\*

Кроме скалярного и векторного произведений для векторов существует еще понятие **смешанного произведения**.

**Смешанное произведение трех векторов** – это скалярное произведение векторного произведения двух первых векторов на третий вектор (т.е. число).

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1). \quad (1)$$

Смешанное произведение трех векторов по модулю равно **объему параллелепипеда**, построенному на этих векторах.

**Объем пирамиды** равен 1/6 от объема параллелепипеда, построенного на тех же векторах.

**Пример 1.** Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{a} = (1,0,0)$ ,  $\vec{b} = (-3,1,0)$ ,  $\vec{c} = (1,0,-2)$ .

*Решение:* По формуле (1) находим:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 * (-2) - 0 * 0) - 0((-3) * (-2) - 1 * 0) + 0((-3) * 0 - 1 * 1) = -2. \blacksquare$$

**Пример 2.** Даны три вектора  $\vec{m} = (1,0,0)$ ,  $\vec{k} = (0,2,0)$ ,  $\vec{h} = (0,0,5)$ . Построить векторы в пространственной системе координат, достроить до параллелепипеда и найти его объем с помощью формулы смешанного произведения.

*Решение:* По формуле (1) находим:

$$V = (\vec{m}, \vec{k}, \vec{h}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1(2 * 5 - 0 * 0) - 0(0 * 5 - 0 * 0) + 0(0 * 0 - 2 * 0) = 10.$$

Ответ:  $V=10$ . ■

### Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите скалярное и векторное произведения векторов:
  - а)  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ ,    б)  $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,
2. Постройте и вычислите площадь треугольника с вершинами  $A(1,1,1)$ ,  $B(2,3,4)$ ,  $C(4,3,2)$ .
3. Определите угол между векторами  $\vec{a}(3,4,5)$  и  $\vec{b}(4,5,-3)$ .
4. Найдите смешанное произведение векторов:  $\vec{a} = (3,2,1)$ ,  $\vec{b} = (2,0,1)$ ,  $\vec{c} = (-2,0,1)$ .

### Задание на дом:

1. Заполните таблицу по дате рождения:

	Дата		Месяц		Год			
Дата рождения	0	7	0	4	1	9	6	1
Буквы	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$k$	$m$	$n$

1. Постройте векторы, выбирая числа из таблицы:  $\vec{m} = (e, 0, f)$ ,  $\vec{k} = (0, k, d)$ ,  $\vec{h} = (0, g, h + e)$  в пространственной системе координат, достройте до параллелепипеда и найдите его объем с помощью формулы смешанного произведения.