Раздел 1. Основы математического анализа
Тема 1.1. Последовательности
Занятие №1. Элементарные функции и их графики (повторение) (1 ч)

Цель: проверить остаточные знания

Входной контроль

1. Вычислите значения функции на интервале [-3;3] с шагом 1, результаты оформите в виде таблицы и постройте график.

№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание
1). y=2x^2+1	2). y=3x^2+1	3). y=2x^2+3	4). y=2x^2+2
5). y= -2x^2+1	6). y= -3x^2+1	7). y= -2x^2+3	8). y= -2x^2+2
9). y=2x^2-1	10). y=3x^2-1	11). y=2x^2-3	12). y=2x^2-2
13). y= -2x^2-1	14). y= -3x^2-1	15). y= -2x^2-3	16). y= -2x^2-2
17). y=3x^2+2	18). y=3x^2+3	19). y= -3x^2-4	20). y= -3x^2-1
21). y= -3x^2+2	22). y= -3x^2+3	23). y= -3x^2+4	24). y= -3x^2+1
25). y=3x^2-2	26). y=3x^2-3	27). y= 3x^2-4	28). y= 3x^2-1

2. Вычислите значения функции на интервале [-90^o;90^o] с шагом 30^o, результаты оформите в виде таблицы и постройте график.

№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание
1). *y*=2sin*x*+1	2). *y*=-2cos*x*-1	3). *y*=sin*x*+1	4). *y*=2sin*x*+1
5). *y*=-2sin*x*+1	6). *y* =-sin*x*+1	7). *y* =-sin*x*+2	8). *y* =-2sin*x*+1
9). *y* =2sin*x*-1	10). *y* =sin*x*-1	11). *y* =sin*x*-2	12). *y* =2sin*x*-1
13). *y* =-2sin*x*-1	14). *y* =-sin*x*-1	15). *y* =-sin*x*-2	16). *y* =-2sin*x*-1
17). *y* =2cos*x*+1	18). *y* =cos*x*+1	19). *y* =cos*x*+2	20). *y* =2cos*x*+1
21). *y* =-2cos*x*+1	22). *y* =-cos*x*+1	23). *y* =-cos*x*+2	24). *y* =-2cos*x*+1
25). *y* =2cos*x*-1	26). *y* =cos*x*-1	27). *y* =cos*x*-2	28). *y* =2cos*x*-1

3. Вычислите:

№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание
1). $10\sqrt{0{,}0121}+\sqrt{121}$	2). $10\sqrt{0{,}64}\ -2\sqrt{100}$	3). $10\sqrt{0{,}09}+\sqrt{81}$.
4). $10\sqrt{0{,}04}-\sqrt{100}$.	5). $10\sqrt{0{,}49}\ -\sqrt{144}$	6). $10\sqrt{0{,}01}-\sqrt{121}$
7). $10\sqrt{0{,}16}-\ \sqrt{81}$.	8). $10\sqrt{0{,}25}\ -\sqrt{36}$.	9). $10\sqrt{0{,}04}+\sqrt{100}$.
10). $10\sqrt{0{,}16}\ -\sqrt{81}$.	11). $10\sqrt{0{,}25}-3\sqrt{36}$.	12). $10\sqrt{0{,}81}+\sqrt{121}$
13). $10\sqrt{0{,}16}-3\sqrt{81}$.	14). $30\sqrt{0{,}64}\ -\sqrt{81}$.	15). $10\sqrt{0{,}16}-3\sqrt{81}$.
16). $10\sqrt{0{,}36}\ \ -\sqrt{36}$.	17). $10\sqrt{0{,}09}\ -\sqrt{81}$	18). $10\sqrt{0{,}49}+\sqrt{144}$.
19). $10\sqrt{0{,}64}\ -\ \sqrt{81}$.	20). $10\sqrt{0{,}01}+\sqrt{121}$	21). $10\sqrt{0{,}36}-2\sqrt{36}$
22). $10\sqrt{0{,}81}+\sqrt{121}$	23). $10\sqrt{0{,}64}-\sqrt{100}$.	24). $10\sqrt{0{,}64}-2\sqrt{81}$.
25). $20\sqrt{0{,}16}\ -\sqrt{81}$.	26). $20\sqrt{0{,}16}-\sqrt{81}$.	27). $20\sqrt{0{,}64}-2\sqrt{81}$.
28). $20\sqrt{0{,}81}+\sqrt{121}$	29). $10\sqrt{0{,}81}+\sqrt{121}$	30). $10\sqrt{0{,}16}-\sqrt{81}$.

4. Решите уравнение:

№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание	№ варианта, задание
1) 2^x=1024.	2) 2^x=64.	3) 3^x=27.	4) 4^x=256.
5) 2^x=32	6) 4^x=64.	7) 5^x=125.	8) 5^x=625.
9) 3^x=81.	10) 2^x=256.	11) 2^x=512.	12) 4^x=1024.
13) 6^x=216.	14) 6^x=1296.	15) 7^x=49.	16) 8^x=64.
17) 10^x=10000.	18) 11^x=121.	19) 12^x=144.	20) 13^x=169.
21) 14^x=196.	22) 15^x=225.	23) 2^x=128.	24) 3^x=243.
25) 10^x=1000.	26) 10^x=100000.	27) 5^x=3125.	28) 2^x=2048.

5. Заполните таблицу, используя следующие термины и формулы:

Квадратичная, линейная, тригонометрическая, y=sinx, y=ax+b, y=ax²+b, парабола, синусоида, прямая

Функция	Уравнение	График

Домашняя работа

1. Вычислите значения функции на интервале [-3;3] с шагом 1, результаты оформите в виде таблицы и постройте графики.
   1.1. $y=2x^2-\frac{N}{4}$,
   1.2. $y=2^x+\frac{N}{4}$,
   1.3. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{N}{4}$.
2. Вычислите значения функции на интервале [-90°;90°] с шагом 30°, результаты оформите в виде таблицы и постройте графики.
   2.1. $y=\sin 2x+\frac{N}{4}$,
   2.2. $y=\cos 2x-\frac{N}{4}$,

   N – номер вашего порядкового номера в журнале.

Занятие №2. Числовые последовательности

Цель: познакомиться с видами последовательностей и способами их задания, а также с понятиями «ряд», «вариация»

Расположенные друг за другом n чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ называют ***числовой последовательностью*** длины n. Элементы, из которых она составлена, называются ее ***членами***. Обозначение $\{a_n\}$, (a_n). Например, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$.

Говорят, что задана ***бесконечная*** числовая последовательность, если всякому натуральному числу (номеру места) по какому-либо закону однозначно поставлено в соответствие определенное число – член последовательности.

Способы задания последовательности:

1. ***Аналитический*** – задание с помощью формулы общего члена, указывающей, как по номеру члена последовательности n вычислить член последовательности a_n.
2. ***Рекуррентный*** – указываются первый член последовательности и формула зависимости n+1 члена последовательности от n-го члена при $n \geq 1$.
3. ***Табличный*** - запись в виде таблицы (используется для конечных последовательностей).
4. ***Графический*** – изображение в виде графика.
5. ***Словесный*** – описывается словами способ получения членов последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называют ***возрастающей*** (соответственно ***убывающей***), если для любого номера n, выполняется неравенство $a_{n+1} > a_n$ (соответственно, $a_{n+1} < a_n$):

1, 3, 5, …, n+2,… - возрастающая последовательность.

12, 10, 8, …, n-2,… - убывающая последовательность.

Совокупность величин, находящихся между собой в такой зависимости, что каждая из них может быть получена одна из другой по некоторому закону, называется ***рядом***.

Обозначение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Например: $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots \frac{n+1}{n} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.

О. Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... , \qquad (1)$$

где числа a_1, a_2, …, a_n, …, называемые **членами ряда**, образуют бесконечную последовательность; член a_n называется общим членом ряда.

Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ,… , $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, , составленные из первых членов рядя (1), называются **частичными суммами** этого ряда.

В каждой совокупности различных данных (вес, плотность и т.д.) ее отдельные элементы отличаются друг от друга по величине изучаемого признака. Это различие называется ***вариацией***.

Вариационный ряд – это ряд числовых значений изучаемого признака.

Задания для самостоятельной работы:

1. Напишите следующие пять членов последовательности:
   а) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$, $a_4=8$, $a_5=12$, $a_6=13$.
   б) $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=8$, $a_4=16$.
2. Последовательность задана формулой $a_n = \frac{n-1}{n+1}$. Напишите первые 10 членов.
3. Выпишите для n=1,2, 3, 4, 5 члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^n \cos n\alpha + b^n sin n\beta \right)$.

4. Выпишите для i=1,2, 3, 4, 5 члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\omega^i \cos i\varphi + \tau^i\right)$.

5. Распишите сумму:

а) $\sum_{n=1}^{5}\left(a^n \cos n\alpha\right)$, б) $\sum_{n=1}^{5}\left(b^n \sin\ n\beta\right)$.

6. Найти формулу общего члена ряда по его данным первым членам:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$; 2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\sqrt[3]{3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\sqrt[3]{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$;

4) $\frac{2}{4}-\frac{4}{9}+\frac{6}{16}-\frac{8}{25}+\ldots$; 5) $\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{8}{9}+\frac{16}{16}+\ldots$;

6) $\frac{1}{9}+\frac{1\cdot 2}{25}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{49}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{81}+\ldots$;7) $\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{7\cdot 10}+\frac{1}{9\cdot 12}+\ldots$;8) $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{11}-\frac{5}{14}+\ldots$.

3. Вычислите частичную сумму 5 –ти членов ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}+\ldots$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+3)}=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+3)}+\ldots$

Задание на дом:

1. Последовательность задана формулой $a_n=\frac{1}{n+1}$. Напишите первые 5 членов.

Занятие №3. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Повторение материала:

1. Что называют числовой последовательностью?
2. Перечислите способы задания последовательности.
3. Последовательность задана формулой $a_n=A+n$, где A – номер варианта . Напишите первые 5 членов.

* * *

Конечную или бесконечную числовую последовательность $\{a_n\}$ называют ***арифметической прогрессией***, если каждым ее член, начиная со второго равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называемом ***разностью*** арифметической прогрессии, т.е.

$$a_n=a_{n-1}+d.$$

При $d>0$ прогрессия возрастает, при $d<0$ – убывает.

Сумма первых n-членов $S_n=a_1+\ldots+a_n$ называется ***частичной*** суммой.

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$$

$a_n=a_1+(n-1)d$ – формула n-го члена арифметической прогрессии, $a_1=a_n-d(n-1)$,

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1},n=\frac{a_n-a_1}{d}+1.$$

Числовую последовательность $\{b_n\}$ отличных от нуля членов называют ***геометрической прогрессией***, если каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число q, называемому ***знаменателем*** геометрической прогрессии, т.е. $b_n=b_{n-1}*q$ ($q\neq 0$, $b\neq 0$).

Сумма первых n-членов $S_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$ называется ***частичной суммой***.

$b_n=b_1*q^{n-1}$ – формула общего члена геометрической прогрессии.

Сумму первых n членов можно найти по формуле:

$$\begin{cases} S_n=b_1\dfrac{q^n-1}{q-1}\ \text{при}\, q\neq 1,\\ S_n=nb_1\,\text{при}\, q=1.\end{cases}$$

Если $b_1>0$ и $q>1$ или $b_1<0$ и $0<q<1$, то прогрессия является ***возрастающей***.

Если $b_1>0$ и $0<q<1$или $b_1<0$ и $q>1$, то прогрессия является ***убывающей***.

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите первые пять членов арифметических прогрессий:

   а) $a_1=2$, $d=3$, б) $a_1=0{,}2$, $d=0{,}3$, в) $a_1=-0{,}2$, $d=0{,}3$,

   г) $a_1=\frac{1}{2},d=\frac{1}{3}$, д) $a_1=-\frac{1}{2},d=-\frac{1}{3}$, е) $a_1=-\frac{1}{2},d=\frac{1}{3}$,
2. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:

   а) $a_n=\frac{2^n+3}{2^{n+1}}$; б) $a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$; в) $a_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}$; г) $a_n=\frac{(n+1)!}{2n}$;

   д) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; е) $a_n=\frac{1}{(3n-1)\cdot(2n+1)}$; ж) $a_n=\frac{n^2}{(n+1)\cdot(n+2)}$.
3. Найдите сумму первых 10–ти членов арифметической прогрессии, если $a_n=4n+2$.
4. Найдите сумму 5-ти членов арифметической прогрессии, если $a_n=3n+5$.
5. Сумма первых 5-ти членов арифметической прогрессии равна 20, первый член равен 5. Найдите разность прогрессии.
6. Сумма первых десяти членов арифметической прогрессии равна 50, разность равна 5. Найдите первый член прогрессии.
7. Запишите первые 5 членов геометрической прогрессии:

а) b_1=2, q=3, б) b_1=0,2, q=0,3, в) b_1=-0,2, q=0,3,

г) $b_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{3}$, д) $b_1=-\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{3}$, е) $b_1=\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{3}$.

Задание на дом:

1. Выпишите первые пять членов арифметической прогрессии, если a_1=N (N-номер Вашего порядкового номера в журнале), d=1/2. Найдите сумму первых 10–ти членов.

2. Выпишите первые пяти членов геометрические прогрессии b_1= - N/3 (N-номер Вашего порядкового номера в журнале), q=1/3 и найдите сумму первых 5 членов.

Вопросы для повторения:

1. Какие виды прогрессий вы знаете? Чем они отличаются?
2. Что называют разностью арифметической прогрессии?
3. Как найти сумму арифметической прогрессии?
4. Как найти сумму геометрической прогрессии?