Тема 2. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.
Занятие №15. Матрицы и действия над ними

Числовой матрицей размерности (m×n) называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\|a_{ij}\|,$$

здесь m – число строк, n – число столбцов. Числа a_{ij}, из которых составлена матрица, называются **элементами матрицы**. Число i обозначает номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых в матрице A расположен элемент a_{ij}. Элементы матрицы a_{11}, a_{22}, a_{33},..,a_{nn} называются **главными диагональными элементами**.

Главной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого верхнего угла матрицы в правый нижний угол.

Побочной диагональю матрицы называется диагональ, проведённая из левого нижнего угла матрицы в правый верхний угол.

Следом матрицы называется сумма диагональных элементов матрицы.

Матрица A размерности (m×n) обозначается: $A_{m\times n}=\|a_{ij}\|$.

Матрица размерности (n×n) называется **квадратной матрицей** порядка n.

Примеры:

1) матрица размерности 2×3: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2) матрица второго порядка (2×2): $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3) квадратная матрица третьего порядка $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$;

Некоторые виды матриц				
Нулевая матрица	верхняя треугольная	нижняя треугольная	диагональная	единичная матрица третьего порядка
$\theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathrm{D}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\mathrm{F}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$	$\mathrm{G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вектор-строкой называется матрица, состоящая из одной строки (1; 3; 3).

Вектор-столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны

I. Транспонирование матриц

Транспонирование матриц - это операция замены строк матрицы ее столбцами с теми же номерами. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, принято обозначать A^T.

Пример 1: Найти транспонированную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

II. Сложение и вычитание матриц

1. **Сложение (вычитание) матриц.** Складывать (вычитать) можно лишь те матрицы, размерности которых совпадают. Для того чтобы сложить (вычесть) две матрицы, надо сложить (вычесть) их соответствующие элементы, то есть элементы, стоящие на одних и тех же местах. Если $A_{m\times n}=\|a_{ij}\|$, $B_{m\times n}=\|b_{ij}\|$, то матрица $C=A+B$ такая что, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Пример 2: Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & 2+2\\ 3+0 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 4\end{pmatrix}. \blacksquare$$

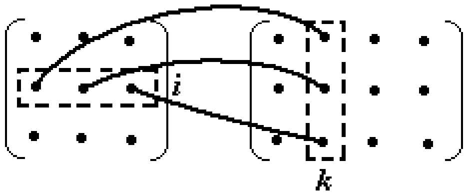
III. Умножение матриц

2. **Умножение матрицы на число.** Произведением матрицы на число называется матрица, полученная из исходной умножением каждого ее элемента на заданное число.

Пример 3: Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ на число 3:

$$3A=3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3*1 & 3*2\\ 3*3 & 3*0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 0\end{pmatrix}.$$

3. **Умножение матрицы на матрицу.** Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число элементов в строке матрицы A равно числу элементов в столбце матрицы B. Если $(m\times n)$ – размерность матрицы A, $(n\times p)$–размерность матрицы B, то матрицу A можно умножить на матрицу B; при этом получится матрица $C=AB$ размерности $(m\times p)$. Формально: $(m\times n)(n\times p)=(m\times p)$. Произведением матрицы $A_{m\times n}=\|a_{ij}\|$ на матрицу $B_{n\times p}=\|b_{jk}\|$ называется матрица $C_{m\times p}=\|c_{ik}\|$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}$, где $i=\overline{1,m}, k=\overline{1,p}$. . Приведем схему получения элемента c_{ik}.



Пример 4*:* Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1*5+2*7 & 1*6+2*8\\ 3*5+4*7 & 3*6+4*8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix} \blacksquare$$

В общем случае $AB\neq BA$ (даже если обе операции допустимы). Если какие-нибудь матрицы A и B удовлетворяют условию $AB=BA$, то они называются **перестановочными**

Задания для самостоятельной работы:

1. Даны матрицы. Найдите транспонированные к ним матрицы:

   а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$,

   б) $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 9 & -4 & 7\\ 9 & 7 & 6\end{pmatrix}$, $\mathrm{F}=\begin{pmatrix}1 & -6 & 0\\ 6 & 2 & -9\\ 8 & 9 & 8\end{pmatrix}$, $\mathrm{G}=\begin{pmatrix}13 & 7 & -8\\ 2 & -3 & 16\\ 4 & 4 & -5\end{pmatrix}$
2. Найдите сумму и разность матриц из задания №1: A^T+B^T, A-B, D+F, D+G, F^T+G^T.
3. Найдите произведение матриц AB, A^TB^T, DF, F^TD^T:

   $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ и $\mathrm{F}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 8 & 9 & 3\end{pmatrix}$
4. Даны две матрицы A и B. Докажите, что AB=BA.

   а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}$,

   б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$,
5. Найдите матрицы $C=2A+3B$ и $G=2D+F$ (матрицы взять из 1-го задания)
6. Найдите произведение матриц из задания №1: A^TB^T, DF, DG, F^TG^T, DD^T, FF^T.

Задание на дом:

❖ Найдите DD^T, FF^T , DD^T+FF^T (N –номер вашего варианта):

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix}-N & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{F}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -N & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$