Занятие №19. Определители 4-го порядка

Повторение:

1. Как вычислить определитель матрицы треугольного вида?
2. Чему равен определитель единичной матрицы?

***

Находить определители более высоких порядков удобнее, используя понятие «минора».

Если в матрице A вычеркнуть i-ую строку и j-ый столбец, а расположение остальных элементов оставить прежним, то получится квадратная матрица. Ее определитель обозначается M_{ij} и называется ***минором матрицы А***, соответствующим элементу a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots \end{pmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n - 1)-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-той строки и j-того столбца[1].

Пример 1. Найти миноры, соответствующие элементам первого столбца матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Вычеркиваем первый столбец и первую строку, получаем $M_{11}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3$.
2. Вычеркиваем первый столбец и вторую строку, получаем $M_{21}=\begin{vmatrix} \vdots & 7 & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 21$.
3. Вычеркиваем первый столбец и третью строку, получаем $M_{31}=\begin{vmatrix} \vdots & 7 & 1 \\ \vdots & 1 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$. ■

Определителем квадратной матрицы *n*-го порядка считается алгебраическая сумма произведений элементов первого столбца на соответствующие миноры, причем произведения берутся с чередующимися знаками:

$$\det A = |A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1} \quad \text{или} \quad \det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

$$\det A_{3x3} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}.$$

$$\det A_{4x4} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41}.$$

Пример 2. Найти определитель матрицы A из **Примера** 1.

Решение: $\det A_{3x3} = a_{11}(=5)M_{11}(=3) - a_{21}(=-4)M_{21}(=21) + a_{31}(=2)M_{31}(=-1) = 5*3+(-4)*21+2*(-1)=15-84-2=-71$. ■

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти миноры и определтитель матриц А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \cos\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определители четвертого порядка:

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Задание на дом: (N- номер варианта) Вычислите определитель четвертого порядка:

$$\begin{pmatrix} N & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

---

[1] https://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/minors/