Занятие №20. Обратная матрица.

Повторение: Найдите определитель 4-го порядка, где N – ваш порядковый номер в журнале:

$$\det A = \begin{pmatrix} N & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

***

Алгебраическим дополнением данного элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число, равное $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение данного элемента может отличаться от минора этого элемента только знаком.

$$\det A = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Союзная матрица – это матрица, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов матрицы:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Присоединённая матрица $\tilde{A} = A^{*T}$– это транспонированная союзная матрица.

Что такое обратная матрица? Можно провести аналогию с обратными числами: например, число 5 и обратное ему число $\frac{1}{5} = 5^{-1}$. Произведение чисел дает единичный элемент $\frac{1}{5} * 5 = 1$.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к заданной квадратной матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Обратную матрицу A^{-1} можно найти по следующей формуле:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}.$$

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю $\det A \neq 0$.

Пример 1. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Найдем определитель матрицы A: $\det A=\cos\alpha*\cos\alpha+\sin\alpha*\sin\alpha=1\neq 0$, обратная матрица существует.
2. Вычислим миноры матрицы: $M_{11} = \cos\alpha$, $M_{12}= \sin\alpha$, $M_{21}=-\sin\alpha$. $M_{22}= \cos\alpha$.
3. Вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1} M_{11}=(-1)^2 M_{11}=M_{11}= \cos\alpha$, $A_{12}=(-1)^{1+2} M_{12}=(-1)^3 M_{12}=-M_{12}=-\sin\alpha$,

$A_{21}=(-1)^{2+1} M_{21}=(-1)^3 M_{21}=-M_{21}= \sin\alpha$, $A_{22}=(-1)^{2+2} M_{22}=(-1)^4 M_{22}=M_{22}= \cos\alpha$.

4. Составляем союзную матрицу A^*– матрицу алгебраических дополнений:

$$A^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5. Находим $\tilde{A}$ - присоединению матрицу:

$$\tilde{A} = A^{*T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

6. Обратная матрица $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
7. Проверяем: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получили единичную матрицу.■

Пример 2. Найти обратную матрицу, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Только невырожденные матрицы могу иметь обратные!

Решение.

1. Найдем миноры матрицы:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \ M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9.$$

2. Ищем алгебраические дополнения:
$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2M_{11}=M_{11}=1$, $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^3M_{12}=-M_{12}=-7$, $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^4M_{13}=M_{13}=-3$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^3M_{21}=-M_{21}=7$, $A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^4M_{22}=M_{22}=-1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^5M_{23}=-M_{23}=-5$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^4M_{31}=M_{31}=-3$, $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^5M_{32}=-M_{32}=5$, $A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^6M_{33}=M_{33}=9$.

3. Найдем определитель матрицы A:

$\det A=|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}==1*1-3*(-7)+2*(-3)=1+21-6=16.$

4. Составляем союзную матрицу A^*– матрицу алгебраических дополнений

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-7&-3\\7&-1&-5\\-3&5&9\end{pmatrix}$$

5. Составляем $\tilde{A}$ - присоединению матрицу:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&7&-3\\-7&-1&5\\-3&-5&9\end{pmatrix}.$$

6. Обратная матрица $A^{-1}=\frac{\tilde{A}}{\det A}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1&7&-3\\-7&-1&5\\-3&-5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{16}&\frac{7}{16}&-\frac{3}{16}\\-\frac{7}{16}&-\frac{1}{16}&\frac{5}{16}\\-\frac{3}{16}&-\frac{5}{16}&\frac{9}{16}\end{pmatrix}.$

7. Проверяем: $A^{-1}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{16}&\frac{7}{16}&-\frac{3}{16}\\-\frac{7}{16}&-\frac{1}{16}&\frac{5}{16}\\-\frac{3}{16}&-\frac{5}{16}&\frac{9}{16}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&0&1\\2&-1&3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1*\frac{1}{16}+3*\frac{7}{16}-2*\frac{3}{16}&-3*\frac{1}{16}+\frac{3}{16}&2*\frac{1}{16}+\frac{7}{16}-3*\frac{3}{16}\\-\frac{7}{16}-3*\frac{1}{16}+2*\frac{5}{16}&3*\frac{7}{16}-\frac{5}{16}&-2*\frac{7}{16}-\frac{1}{16}+3*\frac{5}{16}\\-\frac{3}{16}-3*\frac{5}{16}+2*\frac{9}{16}&3*\frac{3}{16}-\frac{9}{16}&-2*\frac{3}{16}-\frac{5}{16}+3*\frac{9}{16}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица найдена правильно■

Задания для самостоятельной работы:

1. Найти обратные матрицы для матриц A, B,C, провести проверку.

а) $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-2\\0&5\end{pmatrix}$,

б) $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\cos\alpha\\0&-\sin\alpha&\sin\alpha\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}1&7&-1\\0&-1&5\\0&0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\7&-1&0\\-1&5&2\end{pmatrix}$.

Задание на дом:

❖ Найти обратную матрицу для матрицы A, провести проверку:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-N&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$