

Пример 2. Решить систему размерности 2x2 методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2, \\ -5x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Найдем основной определитель системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} = 2 & a_{12} = -3 \\ a_{21} = -5 & a_{22} = 2 \end{vmatrix} = 2 * 2 - (-5) * (-3) = -11 \neq 0,$$

2. Составляем вспомогательные определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 = 2 & a_{12} = -3 \\ b_2 = 3 & a_{22} = 2 \end{vmatrix} = 2 * 2 - 3 * (-3) = 13; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} = 2 & b_1 = 2 \\ a_{21} = -5 & b_2 = 3 \end{vmatrix} = 2 * 3 - (-5) * 2 = 16;$$

3. Находим решение по формулам: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -\frac{13}{11}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = -\frac{16}{11}$.

4. **Проверим**, действительно ли полученные значения являются решением системы? Подставим их в одно из уравнений системы:

$$2 * \left(-\frac{13}{11}\right) - 3 * \left(-\frac{16}{11}\right) = -\frac{26}{11} + \frac{48}{11} = \frac{22}{11} = 2.$$

Мы получили число, совпадающее со свободным членом в первом уравнении.

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{13}{11}, x_2 = -\frac{16}{11} \blacksquare$$

Пример 3. Решить систему размерности 3x3 методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение.

1. Найдем основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ = 3 * (-4 - 2) - 3 * (2 + 4) + 2 * (4 - 16) =$$

$= -18 - 18 - 24 = -60 \neq 0$ - система имеет единственное решение.

2. Составляем вспомогательные определители:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 * \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 9 * \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 10 * \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \\ = 21 * (-6) - 9 * 6 + 10 * (-12) = -126 - 54 - 120 = -300.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} 21 & 4 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 21 & 4 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = \\ = 3 * 11 - 3 * (-61) + 2 * (-78) = 33 + 183 - 156 = 60.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} -2 & 21 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \\ = 3 * 49 - 3 * 1 + 2 * (-102) = 147 - 3 - 204 = -60.$$

3. Находим решение по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-300}{-60} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{60}{-60} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-60}{-60} = 1.$$

Ответ. -1; 1; 5 (проверку выполните самостоятельно).

Задания для самостоятельной работы:

1. Решите системы уравнений 2x2 по правилу Крамера:

а)
$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ y - 3x = 7. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Решите системы уравнений 3x3 по правилу Крамера:

а)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 2x + y - 4z = 9, \\ 6x - 5y + 2z = 17. \end{cases}$$

Задание на дом:

❖
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = N, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = N, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}, \quad N - \text{номер вашего варианта}$$