Занятие №23. Матричный метод решения СЛАУ

Повторение: решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = N \\ x_2 - 2x_1 = N \end{cases},$$ N – номер вашего варианта

***

Матричный метод – это решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Пример 1. Решить систему с матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение:

1. Запишем систему в матричной форме $AX=b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение системы ищется по формуле $X=A^{-1}b$.

2. Найдем миноры матрицы А:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \ M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \ M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7, \ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \ M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \ M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9.$$

3. Вычисляем алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^2M_{11}=M_{11}=1$, $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^3M_{12}=-M_{12}=-7$, $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=(-1)^4M_{13}=M_{13}=-3$,
$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^3M_{21}=-M_{21}=7$, $A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^4M_{22}=M_{22}=-1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^5M_{23}=-M_{23}=-5$,
$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^4M_{31}=M_{31}=-3$, $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^5M_{32}=-M_{32}=5$, $A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^6M_{33}=M_{33}=9$.

4. Вычисляем определитель матрицы A:

$det\,A= |A|=a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} ==1*1-3*(-7)+ 2*(-3)=1+21-6=16\neq0,$

Внимание! Если |A|=0, то обратной матрицы не существует, и решить систему матричным методом невозможно. В этом случае система решается методом исключения неизвестных (методом Гаусса).

5. Составляем союзную матрицу A^*– матрицу алгебраических дополнений

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 7 & -1 & -5 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

6. Составляем $\tilde{A}$ - присоединению матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -7 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. Обратная матрица $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -7 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{7}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$

8. Проверяем: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{3}{16} \\ -\frac{7}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{5}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1*\frac{1}{16} + 3*\frac{7}{16} - 2*\frac{3}{16} & -3*\frac{1}{16} + \frac{3}{16} & 2*\frac{1}{16} + \frac{7}{16} - 3*\frac{3}{16} \\ -\frac{7}{16} - 3*\frac{1}{16} + 2*\frac{5}{16} & 3*\frac{7}{16} - \frac{5}{16} & -2*\frac{7}{16} - \frac{1}{16} + 3*\frac{5}{16} \\ -\frac{3}{16} - 3*\frac{5}{16} + 2*\frac{9}{16} & 3*\frac{3}{16} - \frac{9}{16} & -2*\frac{3}{16} - \frac{5}{16} + 3*\frac{9}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении обратной матрицы коэффициент (1/16) удобнее не вносить в матрицу. Внесем только (-1) – это упростит дальнейшие вычисления.

Внимание! Если |А|=0, то обратной матрицы не существует, и решить систему матричным методом невозможно. В этом случае система решается методом исключения неизвестных (методом Гаусса).

Обратите внимание, что деление на 16 выполняется **в последнюю очередь!**

9. Выполним матричное умножение $A^{-1}b$, т.е. $X=A^{-1}b$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1}b = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ -7 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1*0+7*1-3*2 \\ -7*0-1*1+5*2 \\ -3*0-5*1+9*2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{9}{16} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1=\frac{1}{16}$, $x_2=\frac{9}{16}$, $x_3=\frac{13}{16}$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решите системы матричным методом:

а. $\begin{cases} x+2y=4, \\ y-3x=7. \end{cases}$

б. $\begin{cases} 3x-y=3, \\ 3x-2y=0. \end{cases}$

в. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ 2x+y-4z=9, \\ 6x-5y+2z=17. \end{cases}$

г. $\begin{cases} 3x_1+2x_2=1, \\ x_1-2x_2+x_3=1, \\ -3x_1-5x_2+x_3=0. \end{cases}$

д. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+x_2+3x_3=4. \end{cases}$

Задание на дом:

❖ Решите систему матричным методом:

$\begin{cases} 3x_1+2x_2=N, \\ x_1-2x_2+x_3=N, \\ -3x_1-5x_2+x_3=0. \end{cases}$, N – номер вашего варианта.