Занятие №5. Предел. Теоремы о пределах

Повторение:

1. Какую последовательность называют геометрической прогрессией?
2. Запишите первые 5 членов геометрической прогрессии, если $b_1=-0{,}2N$, $q=0{,}3$ (N-номер варианта).

* * *

Понятие предела функции является одним из самых важных в математике (Limite – предел (франц.)). В задачах рассматриваются пределы числовых последовательностей и функций. Соответственно, различают определения предела последовательности и предела функции.

Но последовательность можно рассматривать как функцию, определённую при всех натуральных значениях аргумента, и тогда свойства предела для функций относятся и к пределам последовательностей, если подставить вместо n переменную x.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что все члены последовательности с номерами $n>N$ удовлетворяют неравенству $|a_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Если последовательность имеет пределом число a, то говорят, что она ***сходится*** к числу a.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, в противном случае – ***расходящейся***. Сходящаяся последовательность имеет только один предел. Предел последовательности, все члены которой равны одной и той же величине, равен этой же величине.

Последовательность называется ***бесконечно малой***, если ее предел равен нулю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Последовательность называется ***бесконечно большой***, если ее предел стремиться к бесконечности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, $x\neq a$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Предел функции отличается от предела последовательности тем, что функция определена на промежутке, а не на множестве натуральных чисел, поэтому ***предел функции рассматривается в некоторой точке***, а ***последовательность имеет только один предел***.

Следовательно, всегда надо говорить «предел данной функции в данной точке a», причем точка a должна принадлежать области определения функции, либо должна совпадать с одним из концов этой области.

При вычислении пределов в результате простой подстановки в них предельных значений аргумента встречаются неопределённости вида $0/0$, 0^0, 1^∞, ∞-∞, ∞/∞, ∞^0, $0\cdot\infty$. Часто простыми преобразованиями выражений можно избежать такого вида неопределенностей.

Некоторые теоремы о пределах

1. Если число a разделить на ∞–малое, то частное обращается в ∞:

$$\frac{a}{x}\to\infty,\ x\to 0 \text{ или } \lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty .$$

2. Если число a разделить на переменную, которая безгранично возрастает, то частное будет числом ∞–малым.

$$\frac{a}{x}\to 0,\ x\to\infty \text{ или } \lim_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0 .$$

3. При отыскании предела отношения двух многочленов относительно переменной, например, x оба члена отношения необходимо разделить на x^n, где n–наивысшая степень многочлена.
4. Предел многочлена при $x\to a$ равен значению этого многочлена при $x=a$.
5. Если две переменные равны между собой $x_1=x_2$ и $x_1\to a_1$, $x_2\to a_2$, то $a_1=a_2$.
6. $\lim\limits_{x\to a} a = a \quad (a = \text{const})$.
7. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0, \text{ то:}$$

8. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов данных функций

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B.$$

9. Предел произведения двух функций равен произведению пределов данных функций

$$\lim_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = AB.$$

10. Предел отношения функций равен отношению пределов данных функций

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

11. Если функции равны между собой $f(x)=g(x)$ и каждая из них стремится к пределу, то эти пределы равны между собой $A=B$.

Пример 1. Для решения используем свойство №4: $\lim\limits_{x\to 4} x^2 = \lim\limits_{x\to 4} x^2 = 4^2 = 16$ ■

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x}{3x^3-2}$.

Решение. В числителе и знаменателе стоят многочлены. Наивысшая степень равна 3. Разделим числитель и знаменатель на x^3 (свойство №3) и используем свойства пределов 9 и 11:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{2}{x^3}} = \frac{2+0}{3-0} = 2/3 \text{ ■}$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Покажите, что при $n\to\infty$ последовательность $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2+\frac{1}{n}\ldots$ имеет пределом число 2.
2. Вычислите пределы, используя решение примера №1:

а) $\lim\limits_{x\to 3} x^2$, б) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2+1)$, в) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{x^4-8}$,

г) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3}{2x^2+4}$ д) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{5x^2+2}{2x^2+3}$.

3. Вычислите пределы, используя решение примера №2:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-x+3}{x^3-8x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x^2+4}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x+1}{2x^3-3x+4}$.

Задание на дом:

❖ Вычислите: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3-8x+1}{14x^3-13x+4}$.