Занятие №5. Решение примеров

Повторение:

1. Дайте определение предела последовательности.
2. Приведите любые три свойства пределов.
3. Найдите предел: $N*\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+1}{x^4+7}$, где N - номер Вашего варианта.

***

Часто при нахождении пределов после подстановки значения переменной получается неопределённость вида 0/0. Чтобы избежать этого, необходимо преобразовать исходное выражение.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

Решение.

Шаг 1. Подставим вместо x значение «3»:

$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\frac{3^2-5\cdot3+6}{3\cdot3^2-9\cdot3}=\frac{9-15+6}{27-27}=\frac{0}{0}$. Получили неопределенность вида 0/0. Но сделать вывод, что предел не существует, мы не можем. Необходимо постараться преобразовать выражения в числителе и в знаменателе.

Шаг 2. Рассмотрим числитель. Если найти корни уравнения x^2-5x+6=0, то мы сможем разложить многочлен на множители. Найдем дискриминант D=b^2-4ac=25-24=1 и корни $x_{1,2}=\dfrac{5\pm1}{2}, x_1=3,\ x_2=2$. Следовательно, x^2-5x+6=(x-3)(x-2).

Шаг 3. В знаменателе можно вынести за скобку 3x. Итак:

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{3x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot3}=\frac{1}{9}.$$

Таким образом, получив изначально неопределенность, мы не можем быть уверены, что предел не существует. ■

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Решение. Чтобы найти значение данного предела, необходимо сначала преобразовать выражение, чтобы избавиться в числителе от корня с помощью известной формулы разности квадратов. Для этого домножим и числитель и знаменатель на сопряженное выражение $\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{x+\sqrt{\left(x^2-4x\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+x\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}\right)}}=\frac{4}{1+\sqrt{1}}=\frac{4}{2}=2\ ■$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sqrt{x+1}-1}$

Решение:

Шаг 1. Подставим вместо x значение «0»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{5\cdot 0}{\sqrt{0+1}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}.$$

Получили неопределенность вида 0/0.

Шаг 2. Чтобы найти значение данного предела, необходимо сначала преобразовать выражение, чтобы избавиться в знаменателе от корня, что опять можно сделать с помощью формулы разности квадратов. Домножим и числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{(\sqrt{x+1}-1)}\frac{(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{5x(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}^2-1^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim_{x\to 0}\frac{5x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}5(\sqrt{x+1}+1)=5(\sqrt{0+1}+1)=5\cdot 2=10.\ \blacksquare$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x^2+3x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+1}$,

г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, д) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{7\left(x-5\right)}{10-2x}$, е) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2\left(3-18x\right)}{4-24x}$,

ж) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2-1}$.

2. Найдите пределы, преобразовав выражения:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^2-2x\right)\left(x-2\right)}{x^2-4x+4}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4(x^2-4)}{x^2-4x+4}$, в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sqrt{x}-8x}{\sqrt{x}-2\sqrt{x}}$

3. Найдите пределы, домножив и числитель и знаменатель на сопряженное знаменателю выражение:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{15x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

Задание на дом:

❖ Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.