Практическое занятие №56. Применение производной в решении практических задач на экстремумы

Цель урока: усвоение умений самостоятельно применять знания, умения и навыки

Письменно ответить на вопросы:

1. Функция называется возрастающей на данном промежутке, если…
2. Функция называется убывающей на данном промежутке, если…
3. Точка x_0 называется точкой минимума, если…
4. Точка x_0 называется точкой максимума, если…
5. Физический смысл производной.

***

Для повышения эффективности производства и улучшения качества продукции необходимым условием является использование математических методов. Большая роль отводится задачам на экстремумы, т.е. задачам на отыскание наибольшего и наименьшего значения, наиболее выгодного, наиболее экономного. С такими задачами приходиться иметь дело разным специалистам: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы получилось как можно больше продукции, логисты стараются спланировать доставку товаров так, чтобы транспортные расходы оказывались минимальными и т.д.

Сварщикам, например, часто требуется решить задачу, как из круглого листа вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости (решение найдите в интернете).

Рассмотрим решение двух задач.

Пример 1. Требуется изготовить бак без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, а объем равен 108 см^3 (рис.1). При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?

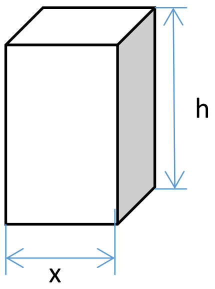

Рис. 1

Решение:

1. Пусть сторона основания равна x см, а высота – h см.
2. Объем параллелепипеда $V=x*x*h=x^2h$ или по условию $x^2h=108$. Выразим из этой формулы высоту параллелепипеда:

$$h=108/x^2. \qquad (1)$$

3. С другой стороны, чтобы узнать какое количество материала пойдет на изготовление бака необходимо найти площадь S полной поверхности параллелепипеда без учета верхнего основания (крышки). Площадь поверхности параллелепипеда находится по формуле $S_{полн}=2(x*x+x*h+x*h)=2(x^2+2xh)$. Площадь крышки (основания) равна $S_{осн}=x^2$, ее надо вычесть из полученной формулы $S=S_{полн}-S_{осн}=2(x^2+2xh)-x^2=x^2+4xh$.
4. Подставим вместо h выражение (1). Получим формулу площади как функцию от x:

$$S(x)=x^2+4*x*108/x^2=x^2+432/x.$$

5. Найдем производную $S'(x)=(x^2+432/x)'=2x-432/x^2$.
6. Чтобы найти экстремум, необходимо приравнять производную нулю: $S'(x)=0=2x-432/x^2=0$; далее находим $2x^3=432$; $x^3=216$; $x=6$.
7. По условию задачи $x\in(0;+\infty)$. Рассмотрим поведение производной и функции, построим таблицу:

	(0;6)	6	(6; +∞)
$S'(x)$	<0	0	>0
$S(x)$	↓	$S(6)=x^2+432/x=6^2+432/6=36+72=108$	↑
		точка минимума	

8. Получили x=6 – точку минимума, следовательно, S(6)=108 см^2 наименьшее значение.
9. Следовательно, сторона основания x равна 6 см, а высота $h=108/x^2=108/36=3$ см.

Ответ: стороны бака 3 и 6 см.

Пример 2. Из проволоки длиной 20 см надо сделать прямоугольник наибольшей площади. (рис. 2). Найти его размеры.

Решение:

1. Длина проволоки равна периметру будущего прямоугольника P. Обозначим одну сторону прямоугольника через x см, тогда периметр $P=2x+2h=20$. Выразим вторую сторону через x: $2h=20-2x$ или $h=10-x$.

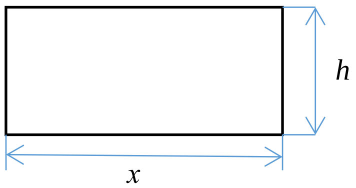

Рис. 2

2. Запишем формулу площади прямоугольника $S=xh$.
3. Заменим h и получим формулу площади как функцию от x:

$$S(x)=(10-x)*x=10x-x^2;$$

4. Найдем производную, приравняем ее нулю и найдем значение переменной:

$$S'(x)=10-2x;\ S'(x)=10-2x=0;\ 2x=10,\ x=5.$$

5. По условию задачи $x\in(0;+\infty)$. Рассмотрим поведение производной и функции, построим таблицу:

	(0;5)	5	(5; +∞)
$S'(x)$	>0	0	<0
$S(x)$	↑	$S(5)=10x-x^2=10*5-5^2=50-25=25$	↓
		точка максимума	

6. Получили $x=5$ – точку максимума, следовательно, $S(5)=25$ см^2 - наибольшая площадь.
7. Следовательно, сторона прямоугольника x равна 5 см, а высота $h=10-x=10-5=5$ см.

Ответ: стороны прямоугольника 5 и 5 см.

Задания для самостоятельной работы:

1. Требуется изготовить бак без крышки в виде прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, а объем равен 665,5 см^3 (рис.1). При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество материала?
2. Из проволоки длиной 240 см надо сделать прямоугольник наибольшей площади. (рис. 2). Найти его размеры.
3. Участок прямоугольной формы одной стороной прилегает к зданию. При заданных размерах периметра 20 м, надо огородить участок так, чтобы площадь была наибольшая.
4. Из прямоугольного листа картона со сторонами 80 см и 50 см нужно сделать коробку прямоугольной формы, вырезав по краям квадраты и загнув образовавшиеся края. Какой высоты должна быть коробка, чтобы ее объем был наибольшим?
5. Чтобы уменьшить трение жидкости о стены и дно канала, нужно смачиваемую ею площадь сделать как можно малой. Требуется найти размеры открытого прямоугольного канала с площадью сечения 4,5 м^2, при которых смачиваемая площадь будет наименьшей.
6. Требуется изготовить открытую коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, с наименьшим объемом, если на ее изготовление можно потратить 300 см^2.
7. В окружность радиуса 30 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найти его размеры.

Домашнее задание

1. Участок прямоугольной формы одной стороной прилегает к зданию. При заданных размерах периметра в 30 м, надо огородить участок так, чтобы площадь была наибольшая.